DISCURSO DE CONTESTACIÓN

POR EL

Ilmo. Sr. D. MARIANO GASCA GONZÁLEZ

Excmo. Sr. Presidente,

Excmos. e Ilmos. Sres. y Sras. Académicos,

Señoras y Señores:

Agradezco la oportunidad que me brinda la Academis de responder en su nombre al nuevo Académico, mi buen amigo José Garay de Pablo. Tres matemáticos han ingresado en poco tiempo en esta Academia, María Teresa Lozano, Manuel Calvo y hoy José Garay, lo que puede hacer creer que fueron elegidos casi a la vez. Pues bien no es así, sino que casi dos décadas separan realmente la elección de los tres, y sólo la constancia de nuestro actual Presidente está permitiendo conseguir, como ha reconocido con sus características humildad y naturalidad el nuevo Académico, que se hagan de una vez estos deberes pendientes del Discurso de Ingreso.

En mis años de estudiante de la Licenciatura de Matemáticas en esta Universidad, éramos muy pocos alumnos. No solíamos pasar de 8 o 10 por curso, por lo que nos conocíamos mucho con los del anterior y posterior. En el curso anterior aún eran menos, pero destacaba fuertemente un alumno del cual se sentían orgullosos sus compañeros. Era José Garay, con una personalidad muy marcada, con una ingenuidad y humildad que le hacían ser muy querido, y cuyos conocimeintos en muchos temas curiosos le granjeaban especial admiración. Así se comentaba que había sido capaz de memorizar las mil primeras cifras del número *pi*, ese número irracional (y por lo tanto con infinitas cifras decimales) tan omnipresente en matemáticas, del que la gente recuerda de la escuela como 3.1416 y sólo los matemáticos precisamos como 3.141592.... Para los incrédulos, el entonces alumno Garay comenzaba a escribirlas en la pizarra con toda exactitud, mientras desgranaba notas musicales, puesto que las había memorizado musicalmente, en lo que se podía conocer como sinfonía del púmero *pi*. O también se comentaba que conocía perfectamente la disposición de las estrellas en el firmamento, lo que también demostraba al que lo quería escuchar y le sacaba el tema.

Con sus primeros alumnos de Bachillerato fue capaz de producir una verdadera pasión matemática, al organizar una especie de campeonato de fútbol matemático, con un reglamento de preguntas y respuestas perfectamente elaborado. Fue un antecesor del famoso y posterior programa de televisión Cesta y Puntos, pero basado sólo en Matemáticas, lo cual hacía más meritorio el que lo disfrutaran los chicos. Yo pude asistir a una demostración que hizo en esta Facultad con sus alumnos de bachiller y todavía recuerdo el entusiasmo de éstos.

Pues bien, estos rasgos que he esbozado han continuado marcando la trayectoria profesional del Profesor Garay. Creo que es uno de esos profesores que no son frecuentes en Ciencias, que son capaces de abordar temas matemáticos en conexión con puntos de vista humanísticos, que son capaces de producir gran amenidad en cuestiones aparentemente aburridas, como me hace recordar su discurso sobre los números en el Paraninfo, en la fiesta de San Alberto Magno de hace unos años y que me trae a la memoria a nuestro colega el Profesor Rodríguez Vidal, fallecido hace 5 unos años y hasta entonces miembro activo de esta Academia, quien tenía análoga facilidad para amenizar temas. Es notorio el buen recuerdo que tienen del Profesor Garay quienes han sido sus alumnos.

Su tesis doctoral me lleva a sumarme a él para ensalzar a otro gran frofesor e investigador, D. Baltasar Rodríguez-Salinas, Catedrático y Académico de Zaragoza en los años sesenta, actualmente jubilado de la Universidad Complutense, pero todavía uno de los miembros más activos de la Real Academia de Ciencias de Madrid. El Profesor Rodríguez-Salinas era capaz, en aquellos años en que pocas tesis doctorales se realizaban en matemáticas en España, de dirigir tres tesis doctorales simultáneamente, una sobre Teoría de la Medida al Profesor Garay, otra sobre Procesos Estocásticos al Profesor San Miguel y otra sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales a mí. Si dirigir tres tesis a la vez, y además muy bien, es algo sumamente difícil y raro en la Matemática mundial, el hecho de que los temas fueran tan diversos podría parecer hasta frivolidad para el que no conoce la gran capacidad del Profesor Rodríguez-Salinas.

El Profesor Garay consiguió rápidamente la plaza de Profesor Agregado numerario de Análisis Matemático de la Universidad de Zaragoza, poco tiempo antes que yo en otra Universidad, mientras que en Cátedras invertimos el orden con una diferencia de meses también. Dado que ambas plazas las obtuvo en Zaragoza, es actualmente el miembro activo más antiguo en la sección de Matemáticas de esta Universidad.

En cuanto al tema que nos ha presentado en su discurso, también sintetiza su labor profesional, puesto que conjuga el rigor del Análisis Matemático con aplicaciones curiosas que éste tiene, puestas de manifiesto de manera especial últimamente con las ondículas, onditas, ondeletas o wavelets, a cuyo nombre en español deseo mayor éxito que al de sus parientes, las funciones splines, para las que en más de cuarenta años todavía no hemos sidocapaces de producir un nombre español ampliamente aceptado. Me limitaré a hacer algunos comentarios complementarios sobre estas wavelets y sobre la Transformada Rápida de Fourier.

Como nos ha dicho el Profesor Garay, estamos rodeados de sonidos, imágenes, cadenas de datos que deben ser comprimidos, transmitidos y recuperados. Esto debe hacerse de manera que se trasmita lo estrictamente necesario para la buena calidad de lo recuperado.Tomemos como ejemplo el código postal. La mayoría de los países del mundo comprimen su información goegráfica en muy pocos dígitos, y el ciudadano de otro país entiende fácilmente el sistema. La excepción, como es habitual en las normalizaciones casi universales, la constituye el Reino Unido, que incluso usando más datos como M5S 1A4 o similares, consigue que nadie les entienda.

Con objeto de apoyar la explicación hecha por el Profesor Garay sobre las transformadas wavelets, voy a usar algunos ejemplos y frases de Gilbert Strang en un artículo publicado en *Americaqn Scientist* en 1994, titulado precisamente *Wavelets*. Explicando la idea en términos de vectgores de dimensión finita, por ejemplo en dimensión 4, supongamos que se tiene el vector (4,2,5,5). Obviamente, estas componentes indican que el vector tiene los coeficientes 4, 2, 5 y 5 respecto a la base canónica. El vector se puede poner como $(4,0,0,0)+(0,2,0,0)+(0,0,5,0)+(0,0,0,5)$. Tan importante es el primer coeficiente como el último. No hay niveles de importancia o de pequeño detalle respecto a cómo va a ser el vector resultado, cuando se van dando los sumandos: todos son de igual importancia.

En lugar de esa base puede ser más interesante usar una base como (1,1,1,1), $(1,1,1,-1)$, $(1,-1,0,0)$ y $(0,0,1,-1)$. Esta base sigue siendo ortogonal, con las consiguientes ventajas de este tipo de bases, pero obsérvese su forma. El primer vector tiene todas sus componentes 1. Es segundo tiene la mitad 1 y la otra mitad -1. El tercero es una contracción del segundo colocada al principio y completada con 0 y el cuarto es análogo al tercero, pero retardado con los 0 colocados al principio. Si pasáramos a dimensión 8 tenemos el primer vector con ocho 1, el segundo cuatro 1 y cuatro -1, dos contracciones de éste en los dos vectores siguientes y dos contracciones de cada uno de estos dos para los cuatro últimos. Cualquier vector de cuatro componentes reales (8 en el caso de dimensión 8) puede ser representado por sus coeficientes respecto a esa base. La cuestión clave de la utilidad de esta base es que esos coeficientes tienen todos un siginificado en términos de medias (semisumas) y semidiferencias. Las medias dan una idea aproximada del tamaño de las componentes originales del vector, en varios niveles, y las diferencias dan los detalles de cada nivel. Cuando esas componentes originales o señales del vector oscilan mucho, y cambian rápidamente, los detalles son importantes. Cuando la señal es casi sostenida (es decir, casi constante), no lo son tanto. Así es como la compresión trabaja: ignorando loque el ojo no ve o lo que el oído no puede oir. En nuestro ejemplo con cuatro componentes se calcularían las medias de las dos parejas (4,2) y (5,5), es decir 3 y 5. También las semidiferencias, 1 y 0. Éstas se guardan como detalles suplementarios de este nivel, y con la pareja de medias (3,5) se calcula la media, 4 y la semidiferencia -1, que queda como detalle de este nivel. Así nuestro vector se puede poner como suma de $(4,4,4,4)$, $(-1,-1,1,1)$ y $(1,-1,0,0)$. El primer sumando indica que las componentes son del orden de 4, el segundo las corrige y el tercero las vuelve a corregir por última vez, puesto que la siguiente corrección a realizar corresponde a la semidiferencia que nos ha salido cero.

En el caso de dimensión 8 estos cálculos se extienden a un nivel más y así sucesivamente. Es la idea de la multirresolución. El Profesor Strang en su artículo utiliza para explicar la dimensión 8 un símil musical muy del estilo del Profesro Garay: comenzando por interpretar el $(1,1,1,1,1,1,1,1)$ como una nota sostenida, interpreta $(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)$ como la wavelet tocada por el contrabajo, el primer cello toca $(1,1,-1,-1,0,0,0,0)$ y el segundo $(0,0,0,0,1,1,-1,-1)$. Las violas tocan las cuatro restantes wavelets o vectores, siempre con doble frecuencia sobre la mitad de tiempo. Para dimensión 16 entrarían los violines, etc.

Un duro competidor de las wavelets en la tecnología actual, como también ha dicho el Profesor Garay, es la transformada rápida de Fourier. El algoritmo que la calcula ha sido proclamado reiteradamente como el más importante algoritmo de las últimas décadas. La revista Mathematics of Computation ha sido publicada desde sus orígenes por la American Mathematical Society y su vida se identifica con la del Análisis Numérico, ya que se considera como nacimiento de esta rama de las Matemáticas el nacimiento de la revista. Pues bien, en 1965 apareció en esa revista un trabajo de 5 páginas titulado *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, de James Cooley y John Tuckey. Ese aparentemente insignificante trabajo aceleraba increiblemente los cálculos de una de las actividades más frecuentes en ciencias e ingeniería: la transformada de Fourier.

El algoritmo fue conocido pronto como Transformada Rápida de Fourier, o con sus siglas FFT. Su impacto se extiende desde ingeniería biomédica al diseño de aeronaves eficientes aerodinámicamente. Se estiman en unas 1000 las referencias que ha tenido en sus primeros 25 años, en revistas que van desde Geophysics a Applied Spectgroscopy. Para entender por qué ese algoritmo tiene tan profundo impacto en la tecnología, hay que conocer bien la Transformada de Fourier. Además del procesado de señales tan omnipresente hoy, esa transformada tiene presencia fundamental en la teoría y en la resolución numérica de Ecuaciones en Derivadas Parciales, y por tanto en la Física Matemática. Cualquier fenómeno ondulatorio: seísmos, mareas, electromagnetismo, es un candidato al Análisis de Fourier. Muchos procesos estadísticos, como la eliminación de ruidos en la transmisión de datos, también se basan en el uso de transformadas de Fourier.

La FFT está basada en la factorización de la matriz de Fourier como producto de una colección de matrices huecas, con muchos ceros. El proceso, como nos ha explicado el profesor Garay, se implementa mucho mejor si se trabaja con M una potencia de 2. El resultado es que una computación que requeriría M^2 multiplicaciones, puede ser hecha en el orden de $M \log_2 M$ multiplicaciones. Obsérvese que para $M = 4096$, por ejemplo, el logaritmo vale solamente 12, con lo que el número de operaciones se ha dividido por más de 300. La FFT es un buen modelo de los que se puede obtener con un trabajo simple, pero bien organizado.

A la vez que felicito al Dr. Garay por su discurso y por su ingreso en la Academia, me congratulo en nombre de ésta por recibir a un especialista en estos temas tan actuales. Muchas gracias.

He dicho.