**ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS, QUIMICAS
Y NATURALES DE ZARAGOZA**

TRANSFORMADAS MATEMÁTICAS EN TEORÍA DE SEÑALES

DISCURSO DE INGRESO LEÍDO POR EL ACADÉMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. JOSÉ GARAY DE PABLO

*EN EL ACTO DE SU RECEPCION SOLEMNE
CELEBRADO EL DIA 21 DE ABRIL DE 1998*

Y

DISCURSO DE CONTESTACION POR EL

Ilmo. Sr. D. MARIANO GASCA GONZALEZ

ACADÉMICO NUMERARIO

ZARAGOZA

1998

Depósito legal: Z-698-1998

Imprime:
Sdad. Coop. De Artes Gráficas
Librería General
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza
imprentalg@efor.es

TRANSFORMADAS MATEMÁTICAS

EN TEORÍA DE SEÑALES

POR EL

Ilmo. Sr. D. JOSÉ GARAY DE PABLO

Excelentísimos e Ilustrísimos Señores,

Señoras y Señores Académicos,

Señoras y Señores:

En este momento mi satisfacción es doble.

Por una parte espero que con la presentación de este discurso pueda lograr mi ingreso en la Academia de Ciencias de Zaragoza, a la cual fui benévolamente invitado a pertenecer hace algún tiempo.

Pero al mismo tiempo experimento la agradable sensación de quien ha terminado unos deberes que tenía pendientes y es que en medio de la actividad universitaria nunca encuentra uno tiempo para hacer un discurso. Siempre hay clases que preparar, alumnos a los que atender, tesis que dirigir, artículos para leer, reuniones a las que asistir, etc, y siempre termina uno diciendo que "el discurso ya lo empezaré mañana".

Pero gracias al tesón de nuestro querido Presidente, que con sus visitas mensuales me recordaba continuamente mi deber y compromiso, he logrado vencer la pereza y por fin puedo presentar mi discurso, que aunque modesto, espero me permita ingresar en esta noble Institución.

Sean pues mis primeras palabras de agradecimiento a nuestro Presidente *D. Horacio Marco Moll*, por los ánimos que siempre me ha dado, y por la paciencia mostrada cada vez que pasaba por mi despacho y no tenía terminado el discurso.

También extiendo mi agradecimiento a todos los miembros de la Academia que han aceptado pueda unirme a ellos formando parte de esta ilustre Corporación.

Amado Lóriga

Me cabe el honor de sustituir con la medalla número 10 a *D. Santiago Amado Lóriga* quien a su vez en 1964 había sucedido al *Padre Patricio Mozota*, quien fue el primer académico en llevarla. Procuraré ser digno sucesor de tales ilustres predecesores.

Del *Padre Mozota*, mi abuelo académico, solamente recordaré que cursó brillantemente en nuestra Universidad las carreras de Química y de Matemáticas, y que desarrolló gran parte de su actividad en el Colegio de los Padres Escolapios de nuestra Ciudad, llegando a ser Rector del mismo y más tarde Provincial de la Orden.

En cuanto a *D. Santiago* no estoy seguro si llegué a conocerle personalmente, pero teniendo en cuenta la fecha antes mencionada de su ingreso en la Academia, me inclino a pensar que sí le conocí, ya que seguramente estuve presente en la lectura de su discurso. Y es que precisamente en ese mismo año terminaba yo mi licenciatura en Matemáticas y era habitual por parte de los profesores aconsejarnos asistir a los actos culturales que tenían lugar.

Ahora bien, de lo que sí estoy seguro es que en el caso de haber asistido a aquel acto no me pasó por la cabeza el pensar que al cabo de unos cuantos años me iba a encontrar yo en la misma situación que *D. Santiago* y además heredando la misma medalla que él recibía en aquel momento.

D. Santiago Amado Lóriga unía a su vocación por las matemáticas su vocación por la carrera militar y esta segunda condición influyó considerablemente en la forma de vivir su vida como matemático.

Amado Lóriga cursó brillantemente sus estudios de Matemáticas en nuestra Facultad, siendo posteriormente profesor en la misma durante varios cursos, explicando igualmente materias de Análisis que de Geometría.

Durante la década de los veinte, fundó el *Instituto Amado*, que fue prestigioso centro de cultura y en el que se enseñaban tanto letras como ciencias. Él personalmente se encargaba de la enseñanza de las matemáticas y entre el profesorado con cuya colaboración contó, podemos citar personajes tan relevantes como *D. Juan Cabrera*, que luego fue Rector de nuestra Universidad, *D. Ramón Serrano Suñer*, quien más tarde ocupó el Ministerio de Asuntos Exteriores, el hoy *Beato José María Escrivá de Balaguer*, y otros que están en la mente de todos y que nos han dejado tan buenos recuerdos tales como *D. Pedro Pineda, D. Juan Martín-Sauras, D. Juan Moneva* y *D. Estevan Ciriquián.*

Además editó como órgano del Instituto la revista *Alfa-Beta.*

Pero también durante la época en la que fue Director de la Academia General Militar de nuestra ciudad, no olvidó su carácter universitario y de hombre de Ciencia e hizo todo lo posible por intensificar los lazos de unión entre la Academia y la Universidad mediante reuniones, conferencias y fiestas en común que beneficiaron a ambos centros.

Como muestra de su doble condición de militar y matemático está precisamente el discurso que presentó para su ingreso en esta Academia de Ciencias. El *General Amado* disertó sobre: *Tres siglos de influencia del Ejército en el progreso y divulgación de las*

Matemáticas en España, y en él se recogen importantes datos para la reconstrucción de la historia de las Matemáticas en nuestro país.

Si antes he indicado un punto de coincidencia (aunque sea meramente cronológico) con mi predecesor, este segundo hecho de su paso por la Academia General Militar, me permite encontrar un segundo punto que me relaciona con *D. Santiago*, ya que recientemente yo también he estado vinculado a la misma institución militar impartiendo dos cursos de Análisis Matemático a sendas secciones de Caballeros Cadetes. Siempre recordaré la seriedad y gran interés con que estos jóvenes seguían mis explicaciones matemáticas.

Además con esta actividad he tenido el honor de unir mi modesto nombre al de algunos ilustres matemáticos que dedicaron parte de su actividad en dar clase en centros militares. Por citar solamente un caso recordaré a *Laplace* quien impartió enseñanza en un centro de artillería y donde tuvo ocasión de examinar a *Napoleón*, a quien por cierto aprobó.

Como soy matemático he elegido un tema que es de Análisis Matemático, y a ello hace referencia la primera palabra del título: *Transformadas*. Pero como también me he interesado siempre por conocer las conexiones de las Matemáticas con el mundo exterior añado la segunda parte del título: *Teoría de Señales*.

Y he elegido este tema porque he dedicado al mismo parte de mi actividad de los últimos años y actualmente sigo trabajando en el mismo.

Agradecimientos

Pero antes de entrar en la materia objeto de esta exposición voy a dedicar gustosamente unas líneas para recordar y agradecer a aquellas personas a las que debo mucho en mi formación académica y en mi posterior labor investigadora, aunque en este segundo punto me limitaré por razones de tiempo y espacio a la materia propia de este discurso.

Me gustaría en primer lugar recordar y nombrar uno por uno a todos los maestros y profesores que he tenido durante mis estudios (exactamente han sido 43), pero me voy a limitar solamente a citar a los dos que me introdujeron por las sendas de la investigación.

En primer lugar quiero expresar un recuerdo cariñoso y agradecido para *D. Baltasar Rodríguez-Salinas,* a quien tuve de profesor en las asignaturas de Análisis Matemático cuarto y quinto de licenciatura y en una asignatura de Probabilidades. Con él realicé gran parte de mi investigación en mis primeros años de licenciado y en particular fue mi director de tesis.

El segundo profesor a quien quiero mencionar es a *D. Juan Sancho de San Román,* quien ya me propuso investigar sobre una cuestión de polígonos de anchura afín constante, cuando yo era alumno suyo en el último curso de la carrera.

Pero si es verdad que en la relación entre profesores y discípulos en general la mayor aportación va en la dirección profesor-alumno, al menos en mi caso he de reconocer que también debo parte de mi formación a muchos de mis alumnos. Hay algunos de ellos que nos hacen pensar con las cuestiones que nos plantean, a veces nos estimulan para trabajar más y en general mantienen vivo nuestro deseo de estar al día y no anquilosarnos.

Es para mí una satisfacción en este momento poder citar varios ejemplos, limitándome como antes dije a aquéllos con los que tengo o he tenido alguna relación con el tema objeto del discurso.

En primer lugar cito a *Antonio Ortega Tello.* Fue alumno mío de Matemáticas en varios cursos de Bachillerato, y un buen día, cuando hacía ya tiempo que no le veía vino al despacho y me dijo que había terminado la carrera de Ingeniero de Telecomunicaciones y me enseñó varios artículos que había encontrado en sus estudios. Eran de *Landau, Slepian* y *Pollak* y trataban sobre cuestiones de las que yo nunca había oido hablar. El tema era sobre señales de banda limitada y cosas parecidas. Los hojeé y me llamó la atención la cantidad de fórmulas matemáticas y contenido de Análisis que parecía haber dentro. Me empecé a interesar por estas cuestiones y desde entonces hemos mantenido una relación personal y de trabajo continuo.

Quiero también mencionar entre mis antiguos alumnos de Bachillerato a *Pedro Martínez Martínez,* hoy Catedrático de Electrónica en nuestra Facultad, con quien además de una amistad personal he colaborado en algunos trabajos que luego mencionaré, y que con su visión de físico ha enriquecido mis puntos de vista sobre la teoría de la Señal.

Vuelvo a recordar que de esta época ya pretérita me he limitado a mencionar a los dos anteriores porque la influencia positiva que han tenido sobre mí está relacionada con la teoría de Señales, objeto de este discurso. Si tuviese que enumerar a todos aquéllos de mis antiguos alumnos con quienes me une una sincera amistad y a quienes debo algún tipo de influencia benéfica esta lista sería interminable.

Siguiendo con esta condición restrictiva, voy a terminar mencionando a mis discípulos, en este caso discípulas más jóvenes, con quienes estoy actualmente trabajando en un tema del que hablaré a lo largo de este discurso. Se trata de *Raquel García Catalán, Lucía Agud Albesa* y *Almudena Antuña López* a las que agradezco se hayan confiado en mí para comenzar en su actividad investigadora. La primera ya ha realizado su tesis, y las otras dos están en ello.

Además de la breve lista anterior quiero añadir otras dos personas, con las que he colaborado en trabajos de investigación relacionados con el objeto del tema que nos ocupa.

Una es el actual Profesor de Electromagnetismo *José María Forniés Marquina* quien fue compañero mío en varios cursos de la carrera (en aquella época las carreras de Física y Matemáticas tenían en común los dos primeros cursos y parte de los tres últimos).

Finalmente quiero hacer una mención especial de *José Ramón Valdizán Usón,* Jefe del Servicio de Neurofisiología en el Hospital Miguel Servet quien me introdujo en algunos temas médicos relacionados con la teoría de la Señal y que también serán luego mencionados.

Y tras estos largos preámbulos voy a entrar ya en la materia objeto del discurso.

Señales

Voy a comenzar por precisar lo que entendemos por *señales* no sea que alguien me quiera cambiar de Ministerio como un amigo a quien encontré un día por el Paseo de la Independencia y me comentó: *Ya me han dicho que ahora te dedicas a trabajar en señalizaciones.*

Hoy en día está muy de moda el hablar sobre señales, digitalización de señales y otras cosas parecidas. Y de hecho las señales están siendo causa de confrontamientos tanto entre políticos como entre empresarios.

Fundamentalmente toda señal contiene y transporta alguna información y esto supone que algo varía en el espacio o en el tiempo o bien en ambos simultáneamente.

Un papel en blanco no nos da ninguna información. En cuanto escribimos, pintamos o hacemos signos ya nos puede informar de algo.

Un sonido uniforme a lo largo de un intervalo temporal nos da una información mínima. En cuanto tiene variación en su intensidad o tonalidad a lo largo del tiempo puede ser porque procede de palabras o música y ya tenemos información.

Observamos que en ambos ejemplos nos encontramos con una magnitud (óptica en el primero, acústica en el segundo), que varía en una región del plano (hoja de papel) o de la recta (intervalo temporal) y que cuando estas funciones son constantes tenemos información mínima.

Como consecuencia de lo anterior el modelo matemático más adecuado para estudiar señales es el de función cuyo dominio se extiende en el soporte de la información y cuyas imágenes corresponden a la magnitud que lleva la información.

Según lo que antecede estas funciones pueden ser unidimensionales (caso de fenómenos temporales o espaciales sobre una línea) o multidimensionales, y en principio el rango lo tienen dentro de los números reales.

Por su propia naturaleza las funciones que representan señales tienen unas características propias, especialmente doble acotación en el dominio y en el rango.

Sin embargo aquí se produce el mismo hecho que suele ocurrir cuando se aplica alguna teoría matemática a alguna ciencia. Me refiero a que el mundo matemático es superabundante y proporciona a la teoría muchos más elementos de los que en principio van a ser necesarios en la aplicación. Es el caso de los números irracionales que aunque resulta imposible utilizarlos en ninguna aplicación dado el carácter infinito de su expresión decimal, son contemplados por el Análisis Matemático en su desarrollo.

En el caso de las señales, aunque como antes hemos indicado el conjunto de funciones necesarias para representarlas tiene propiedades muy restrictivas, de hecho para que la teoría funcione más fácilmente incluímos muchas más de las necesarias a sabiendas de que no existe niguna señal física que coincida con ninguna de ellas.

De este modo la teoría funciona adecuadamente tomando el espacio $L^2(\mathbb{R})$. Además en algunos casos resulta que la norma euclídea de la función se puede asociar con la energía de la señal representada.

Pero más aún, en algunos casos es conveniente considerar también funciones complejas, ya que aunque en principio las magnitudes físicas se pueden representar con los números reales el uso de los números complejos permite a veces resolver problemas de una manera más sencilla. Por ejemplo recordamos que son un instrumento muy adecuado para representar voltajes en circuitos con resistencias, autoinducciones y condensadores.

Incluso para el caso de señales muy concentradas en un pequeño dominio, tanto temporal como espacial interesa a veces tomar como modelo matemático, impulsos o *deltas de Dirac* y por extensión las distribuciones temperadas.

De esta forma ocurre que en contra de lo que en principio se podría pensar de que el Análisis Matemático necesario para desarrollar adecuadamente la teoría de señales quedaría restringido a una familia muy limitada de funciones, no es así, y los espacios funcionales que se estudian en esta teoría son mucho más generales y ricos en propiedades.

Otra consideración que hemos de tener en cuenta es que aunque en principio una señal puede tener su dominio continuo (suponiendo que exista continuidad en el tiempo y en el espacio), cuando tratamos de tomar medidas de sus valores para posibles futuras manipulaciones de cálculo hemos de limitarnos a tomar muestras, es decir, lo que luego presentamos como señal es en realidad una sucesión de valores. Por este motivo, según los casos, los modelos matemáticos adecuados son espacios de sucesiones, en concreto el espacio $l^2(\mathbb{Z})$.

1. Transformadas

Hablamos ahora del primer término del título del discurso: *Transformadas.*

De la palabra transformada podríamos decir algo análogo a lo que advierten los profesores de idiomas cuando dicen de una palabra que es una falsa amiga ya que no significa lo que en principio parece. Transformar, en el lenguaje de la calle supone obtener una substancia a partir de otra mediante convenientes modificaciones. Así puede ocurrir que un árbol se tranforme en un mueble, mediante un elaborado proceso en el cual deben utilizarse diversas técnicas. Pero los átomos y partículas materiales que forman el mueble son los mismos que antes estaban en el árbol.

En el mundo matemático una transformada también relaciona dos entes y de hecho nos pasa de uno al otro, pero estos dos entes como luego veremos en variados casos pueden pertenecer a mundos totalmente disjuntos.

El concepto matemático más elemental asociado al de transformada es el de aplicación. Una aplicación actúa sobre dos conjuntos asociando a cada elemento del primer conjunto uno del segundo. Lo que pasa es que para que una aplicación tenga la categoría de transformada debe verificar una serie de propiedades bastante restrictivas. En primer lugar los dos conjuntos que relaciona deben ser conjuntos funcionales, es decir, sus elementos deben ser funciones. Pero además la aplicación debe ser lineal, es decir respete las sumas y los productos por escalares. Si además, como es el caso más frecuente, los espacios tienen alguna estructura topológica la aplicación también la debe respetar.

Digamos que éstas serían las condiciones formales para que tengamos una transformada, pero naturalmente para que una transformada se escriba con mayúscula y reciba un nombre propio necesita cumplir algo más. Me limitaré a citar dos causas por las cuales una transformada puede pasar a los libros y ser estudiada sistemáticamente. Una primera causa está en que cuando las funciones representen algún hecho del mundo físico, la transformada esté asociada a alguna propiedad o relación que tenga interés. Pensemos por ejemplo en la derivación. Claramente verifica los dos requisitos formales para ser transformada pero es que además, cuando la función sobre la que actúa mide alguna magnitud que varía en el tiempo, su transformada, en este caso su derivada, nos informa sobre la rapidez o lentitud con que se produce esta variación.

Una segunda causa que puede justificar la importancia de una transformada consiste en el hecho de que sirva como herramienta para abordar ciertos problemas interesantes. Tendremos ocasión de ver ejemplos de esta naturaleza.

En algunas ocasiones la transformada goza de las dos propiedades, tiene interés en sí misma y además sirve como herramienta para resolver ciertos problemas. La misma derivación es un ejemplo muy conocido de ello.

La familia de transformadas que se encuentran en el mundo matemático es demasiado amplia como para pretender hablar de todas ellas en un discurso aunque sea para ingresar en la Academia. Además aunque dispusiésemos de tiempo ilimitado yo no me considero capaz de hablar de todas ellas aunque sea someramente. Por estos motivos me voy a limitar a hablar con algún detalle solamente de algunas que guardan relación con la teoría de señales.

Advierto ya desde ahora que no pretendo con estas páginas escribir un tratado sistemático sobre este tipo de transformadas. Si cualquiera que oiga esta exposición o luego lea estas páginas está interesado en el tema existen excelentes tratados donde se desarrollan en forma más completa. Algunos de ellos están indicados al final en la bibliografía.

Más bien quiero calificar esta exposición como un paseo que vamos a dar, suponiendo que Uds. me quieran acompañar, por esta parcela de las Matemáticas, deteniéndonos de vez en cuando por algún paisaje cuando coincida con algún punto que haya utilizado en alguno de mis trabajos.

2. Análisis-Síntesis

Hay una propiedad que es común en todas las transformadas aunque en algunas es más evidente que en otras.

Me refiero al hecho de que en general en un par de transformadas una analiza y la otra sintetiza.

En esto los matemáticos tenemos algo en común con los químicos.

Por ejemplo todas las funciones analíticas (que contienen a la gran parte de funciones interesantes), están formadas a partir de unas piezas elementales que son los monomios. La diferencia que hay entre dos funciones analíticas está en la distinta proporción que cada una de ellas toma de cada uno de los monomios.

Así la *serie de Taylor* de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

está sintetizando una función f tomando la "cantidad" a_n de cada monomio z^n, mientras que la fórmula recíproca

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

analiza f indicando la "proporción" de cada z^n que hemos de tomar para reconstruir nuestra función de partida.

Cuando antes comparé nuestro proceso con lo que hacen los químicos cada día en sus laboratorios, no hace falta hacer notar que nosotros los matemáticos nos permitimos unas libertades que nuestros colegas no pueden. En primer lugar utilizamos infinitos ingredientes, y además de algunos de ellos tomamos cantidades negativas o incluso imaginarias. Son ventajas de trabajar con entes abstractos, no sometidos a la materialidad de las cosas.

Volviendo al ejemplo anterior, estamos ante un par de transformadas que relaciona funciones con sucesiones. La transformada que pasa de funciones a sucesiones analiza y la inversa sintetiza.

Esto mismo hacemos más en general cuando en un espacio vectorial, expresamos un vector como combinación de los vectores de una base.

Resaltemos un hecho común a los dos ejemplos precedentes (en realidad el primero es un caso particular del segundo), y que luego va a jugar un papel importante cuando apliquemos las transformadas a la teoría de señales.

En ambos ejemplos vemos que los elementos de un espacio pueden ser representados en términos de una parte propia de dicho espacio. De la elección de esta parte propia dependerán las propiedades y posibles aplicaciones del par de transformadas.

Transformada de Fourier

Comenzaremos hablando de la que sin duda es la más universal entre las transformadas. Me refiero a la de *Fourier.*

El físico y matemático *J.B. Fourier* estaba estudiando cuestiones sobre la transmisión del calor, y observó que el problema sería más sencillo si las funciones que aparecían fuesen senos o cosenos. Entonces pensó que esta sencillez también sería extensible para todas aquellas funciones que pudiesen ser desarrolladas como sumas de senos y cosenos. Esto le llevó a estudiar las series funcionales que llevan su nombre y que son de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \; cos\, 2\pi n\lambda t + b_n \; sen\, 2\pi n\lambda t)$$

donde $f(t)$ es una función periódica con periodo $\frac{1}{\lambda}$.

Fourier publicó sus resultados en una célebre memoria en 1807 y supuso que todas las funciones continuas periódicas admitían un desarrollo de esta naturaleza e incluso expuso una demostración que posteriormente fue calificada como no válida. Fueron matemáticos posteriores los que precisaron las condiciones que debe cumplir una función periódica para que admita un desarrollo en *serie de Fourier* y además concretaron el sentido de la convergencia de la serie.

Más tarde se observó que era conveniente sumergir la serie en el campo complejo reemplazando las funciones coseno y seno por la exponencial $e^{2\pi in\lambda t}$, de la cual aquéllas son partes real e imaginaria respectivamente. Así se llegó a la serie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi in\lambda t}.$$

Luego también se advirtió que cuando el período de la función f tendía hacia infinito, la serie anterior se transformaba en una integral.

Así aparecía una de las fórmulas de la propiamente llamada *transformada de Fourier:*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{2\pi i\omega t}d\omega,$$

que nos expresa la función $f(t)$ como combinación de exponenciales, con la diferencia de que ahora la combinación es en forma de integral en lugar de tratarse de series.

Cuando se interpreta $f(t)$ como una señal, la fórmula anterior supone una sintetización de la señal, tomando como señales básicas las exponenciales, siendo el parámetro ω la frecuencia correspondiente. Cada valor $F(\omega)$ representa la magnitud o cantidad de la señal elemental $e^{2\pi i\omega t}$ presente en $f(t)$.

La segunda fórmula de la transformada:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t}dt$$

supone un análisis de $f(t)$ ya que como se puede observar nos informa del valor de estas magnitudes o proporciones $F(\omega)$.

Hemos de hacer notar que al igual que lo que ya ocurría con la serie al reemplazar las funciones reales coseno y seno por la exponencial correspondiente, aparecen frecuencias negativas y cantidades complejas. Es el precio que pagamos por la comodidad que supone trabajar en el campo complejo que resulta ser más uniforme y sencillo. De todas formas la expresión compleja de $F(\omega)$ encierra una doble información, ya que su módulo coincide con la intensidad de la exponencial presente y su argumento con la fase.

Más adelante tendremos ocasión de recordar estos hechos.

Con lo dicho hasta aquí parece que tenemos en realidad dos tipos esencialmente distintos de *transformadas de Fourier*. La primera en forma de serie válida solamente para funciones periódicas, y la segunda en forma de integral para funciones no periódicas. Sin embargo si hacemos intervenir ahora la teoría de las distribuciones podemos convertir las series en integrales y así unificar las dos en una sola expresión.

La *transformada de Fourier*, cuya estructura acabamos de recordar, es uno de los temas más estudiados por el Análisis Matemático, y su campo es llamado Análisis Armónico. En esta nueva teoría ha quedado atrás su inicial marco de las funciones complejas y seguro que si *Fourier* levantase la cabeza no reconocería su idea en casi ningún concepto o resultado donde ahora se aplica.

Pero si nos limitamos a la teoría de señales, como es la idea de este discurso, hemos de añadir que la interpretación que antes hemos dado de las dos fórmulas de la transformada como análisis y síntesis de una señal es muy fecunda y de ella se deducen muchas aplicaciones. Además por analogía con lo que ocurre con las señales luminosas, la función $F(\omega)$ suele llamarse espectro de $f(t)$, y de esta manera las dos expresiones, temporal $f(t)$ o espacial $f(x)$ y espectral $F(\omega)$ son como las dos caras de una misma moneda. Ambas llevan toda la información sobre la señal, y utilizaremos una u otra según los casos.

Por ejemplo en los filtros lineales sabemos que la expresión temporal de la salida $y(t)$ se obtiene como una convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta $h(t)$ al impulso del filtro, mientras que si utilizamos los espectros se trata del producto

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega),$$

donde $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ son respectivamente los espectros de la entrada y salida del filtro, mientras que $H(\omega)$ es la llamada función de transferencia.

Además esta expresión multiplicativa espectral es la que justifica la denominación de filtro, ya que como se puede observar, cada valor $H(\omega)$ indica la proporción de señal monocromática de frecuencia ω que atraviesa el filtro.

Cartografía Cerebral

Voy a detenerme unos instantes en comentar el interés de la *transformada de Fourier* para la elaboración de la *Cartografía Cerebral*. Es una cuestión en la que fui introducido hace algún tiempo por el anteriormente citado *Dr. Valdizán Usón* y a la que he dedicado parte de mi actividad. Él organizó aquí en Zaragoza las primeras Jornadas nacionales de Cartografía Cerebral en octubre de 1991 y tuvo la amabilidad de nombrarme Presidente de dichas Jornadas.

Ya era conocido desde *Caton* en 1875 la existencia en nuestro cerebro de débiles oscilaciones eléctricas, aunque ya anteriormente *Gall* había supuesto que la materia blanca sirve para transmitir información desde el sistema nervioso central a los niveles inferiores. Pero fue el fisiólogo alemán *Hans Berger*, quien en 1929 realizó las primeras mediciones precisas de la actividad eléctrica en el cerebro, pudiendo situar en esta fecha el origen de la técnica de la *Electroencefalografía.* El mismo *Berger* descubrió el que luego se ha llamado ritmo alfa.

Posteriormente se han ido descubriendo diversos ritmos, distinguiéndose unos de otros por su frecuencia y su amplitud, siendo los más importantes los que enumeramos a continuación.

a) alfa. 8-12 Hz. 30 - 50 μV. Está relacionado con los fenómenos visuales.
b) beta. 20-30 Hz. 5-10 μV. Tiene relación con las funciones motoras.
c) theta. 4-7 Hz. Más de 50 μV. Parece ser que tiene que ver con las emociones.
d) delta. 2 Hz. 100-150 μV. Es muy irregular y es propio de la primera infancia.

Pues bien estos ritmos y otros que aquí no hemos enumerado no están presentes uniformemente en toda nuestra corteza cerebral, y además varían, como ya hemos indicado con la actividad del individuo.

Lo que hace la *Cartografía Cerebral* es construir mapas de nuestra corteza indicando la distribución de intensidades de cada uno de estos ritmos, mapas que luego son analizados con ayuda de la ciencia Estadística tratando de establecer los mapas normales y las posibles anormalidades así como relacionar dichas anormalidades con patologías médicas ya conocidas.

Para confeccionar estos mapas se colocan en el cuero cabelludo 16 electrodos en lugares distribuidos convenientemente y se registran las 16 señales eléctricas correspondientes.

Como hemos dicho que el espectro de estas señales no supera los 40 herzios, esto permite pasarlas por un filtro paso bajo de esta anchura espectral para purificarlas de los posibles artefactos presentes, sin perder nada de la información que interesa. Además al tratarse de señales de banda limitada, tampoco se pierde información cuando son digitalizadas tomando muestras siempre que respetemos la *frecuencia de Nykist* como nos indica el *teorema de Shannon.*

Una vez almacenados todos los datos, el cálculo del espectro de las 16 señales atribuye a cada ritmo una determinada intensidad, y luego mediante una interpolación cuadrática completamos para cada ritmo un mapa cerebral o bien por curvas de nivel o por escalas de colores.

Pero si la *transformada de Fourier* permite hacer todo lo anterior, en el párrafo siguiente vamos a hablar de otra transformada, que permite que todo ello se haga en tiempo real, lo que le da más importancia en casos de diagnósticos inmediatos.

Transformada discreta de Fourier

Esta es una transformada de tipo homogéneo, ya que transforma sucesiones finitas en sucesiones finitas de igual longitud.

Realmente una sucesión finita representa de la mejor forma posible una señal, ya que aunque una señal tiene dominio continuo teóricamente hablando en la práctica los datos que tenemos de la señal son muestras y por lo tanto sucesiones. Además dada la finitud práctica del dominio de toda señal resulta por ello que su mejor representación es una sucesión finita.

La sucesión será unidimensional para señales temporales y de dimensiones posiblemente superiores para señales espaciales.

A veces puede resultar interesante pensar que las sucesiones objeto de estudio son simplemente un período de una sucesión infinita periódica.

En esta transformada las sucesiones que se toman como básicas están todas formadas por las raíces complejas de la unidad de orden el número que indica la longitud de las sucesiones.

Concretamente si M es dicha longitud y

$$\varepsilon_M = e^{\frac{2\pi i}{M}}$$

las sucesiones básicas σ_k $(0 \leq k < M)$ son las siguientes:

$$(\sigma_k)_m = \varepsilon_M^{km} \qquad (0 \leq m < M).$$

Vemos que el primer elemento de todas las sucesiones básicas es la unidad y que en todas ellas aparecen las M raíces M-ésimas de la unidad distinguiéndose unas sucesiones de otras por el orden que ocupan dichas raíces.

Es fácil ver que esta familia σ_k $(0 \leq k < M)$ es base del espacio vectorial S_M de todas las sucesiones con M elementos. Así dada una sucesión cualquiera $\mathbf{a} \in S_M$ admite la siguiente descomposición única

$$\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{M-1} A_n \sigma_n$$

y precisamente esta nueva sucesión $\mathbf{A} = \{A_n\}$ es llamada *transformada discreta de Fourier* de $\mathbf{a}$.

Es fácil establecer la relación existente entre los términos de ambas sucesiones

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} a_m \varepsilon_M^{-mn},\\
a_n &= \sum_{m=0}^{M-1} A_m \varepsilon_M^{mn}.
\end{aligned}
$$

Nos encontramos nuevamente con las dos fórmulas de descomposición (**a**→**A** y de reconstrucción **A**→**a**).

Si sustituímos ε_M por su definición

$$\varepsilon_M = e^{\frac{2\pi i}{M}}$$

y ponemos los subíndices en forma de variables las fórmulas anteriores toman la forma:

$$
\begin{aligned}
A(n) &= \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} a(m) e^{-\frac{2\pi}{M} imn},\\
a(n) &= \sum_{m=0}^{M-1} A(m) e^{\frac{2\pi}{M} imn},
\end{aligned}
$$

que permite observar la gran analogía con las correspondientes transformadas de Fourier.

Esta analogía no es casual ni accidental. De hecho una de las más interesantes aplicaciones de la *transformada discreta de Fourier* fue desarrollada hacia el 1965 por *Cooley* y *Tuckey* y consiste en la creación de un nuevo algoritmo para el cálculo de la *transformada de Fourier*. Es lo que hoy día entendemos por *transformada rápida de Fourier* y que evidentemente no es nueva transformada, sino simplemente un método de cálculo que reduce el hallazgo del espectro a un conjunto relativamente pequeño de multiplicaciones y que unido a la potencia de los modernos ordenadores hace que el cálculo de la *transformada de Fourier* pueda hacerse en tiempo real con el consiguiente interés que esto presenta en muy diversos campos técnicos.

Damos aquí una breve idea de este algoritmo.

Transformada rápida de Fourier

Sean $x(t)$ y $X(\nu)$ una señal y su espectro. Sabemos que aunque teóricamente (salvo en el caso nulo) ambas no pueden ser de soporte compacto, en la práctica ambas tienden a cero en el infinito y por consiguiente existen sendos entornos de cero fuera de los cuales sus valores son despreciables.

Sea σ_0 tal que $X(\nu)$ es despreciable fuera del intervalo $(-\frac{\sigma_0}{2}, \frac{\sigma_0}{2})$.

Ahora elegimos un número natural M y definimos

$$\tau = \frac{M}{\sigma_0}$$

y exigimos a M que la función $x(t)$ sea igualmente despreciable fuera del intervalo $(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$.

Más tarde pediremos también, y veremos el porqué, que M sea una potencia de dos.

Completamos las definiciones con dos nuevos parámetros:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{M}; \qquad \tau_0 = \frac{\tau}{M}.$$

De esta forma se tiene que los pares (σ_0, τ_0) y (σ, τ) son inversos entre sí.

Ahora tenemos

$$x(m\tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{2\pi i \omega m \tau_0} d\omega$$

y teniendo en cuenta todas las hipótesis hechas anteriormente, así como las notaciones introducidas, se deduce que la citada integral del segundo miembro se puede aproximar con la suma finita que exponemos a continuación

$$x(m\tau_0) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{M-1} X(n\sigma) \varepsilon_M^{nm},$$

donde además hemos hecho un corrimiento de índices para dejarlos todos en la zona no negativa.

Ahora bien la expresión anterior puede verse como la fórmula de síntesis de un par de *transformadas discretas de Fourier*. La correspondiente fórmula de análisis nos da

$$X(n\sigma) = \sum_{m=0}^{M-1} x(m\tau_0) \varepsilon_M^{-nm}.$$

Lo que esta fórmula está diciendo es que podemos obtener los valores de la *transformada de Fourier* en la sucesión de puntos $(n\sigma, n \in [0, M-1])$ utilizando la sucesión de muestras $(x(m\tau_0))$ y esto lo podemos hacer mediante $(M-1)^2$ multiplicaciones y las correspondientes sumas.

Naturalmente aquí nos encontramos con el clásico problema de elegir entre precio y calidad.

Cuantas más muestras del espectro queramos calcular tendremos que elegir un número M más grande y así aumentará también el número de operaciones a realizar.

Además la aproximación entre los valores calculados y los auténticos será mayor.

Pero claro hay un límite práctico en esta precisión motivado en primer lugar por el afinamiento de los instrumentos que miden las muestras $x(m\tau_0)$ y luego por los errores inherentes al cálculo.

Lo dicho hasta aquí no tendría demasiado interés si no fuera por lo que sigue. Veremos que una adecuada elección del valor de M puede reducir notablemente el número de multiplicaciones a realizar y esto es lo que precisamente justifica el nombre de transformada rápida.

Supongamos primeramente que elegimos M par. Sea $M = 2M'$.

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{A}$ forman un par de *transformadas discretas de Fourier*, descomponemos ambas sucesiones en dos subsucesiones de longitud M' tomando respectivamente los términos pares e impares de los iniciales. De acuerdo con esta elección llamando $\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$,$\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ a las nuevas sucesiones se tendrá

$$b_n = a_{2n}; \quad c_n = a_{2n+1}; \quad B_n = A_{2n}; \quad C_n = A_{2n+1}.$$

Ahora es fácil comprobar que se verifica

$$A_m = B_m + \varepsilon_{2M}^m C_m \qquad (0 \leq m < M')$$

$$A_{M'+m} = B_m - \varepsilon_{2M}^m C_m \qquad (0 \leq m < M')$$

Además ocurre que los pares de sucesiones ($\mathbf{b}$,$\mathbf{B}$) y ($\mathbf{c}$,$\mathbf{C}$) son también pares de *transformadas discretas de Fourier*. Un sencillo razonamiento nos dice que si calculamos previamente las dos sucesiones $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ y luego aplicamos las relaciones anteriores para calcular $\mathbf{A}$, hemos hecho $2M'^2 - 3M' + 2$ multiplicaciones, es decir, nos hemos ahorrado exactamente $2M'^2 - (M' + 1)$ operaciones de esta naturaleza.

Naturalmente el mayor interés está en poder reiterar estas simplificaciones, objetivo que se logra por supuesto eligiendo como número M una potencia de 2.

Concretamente si $M = 2^k$ se demuestra que el número de multiplicaciones necesarias es del orden

$$k.2^{k-1}$$

frente a las

$$(2^k - 1)^2$$

necesarias si seguimos el método general. Por ejemplo si $k = 10$, las cantidades anteriores son aproximadamente 5.000 y un millón.

Transformada de Laplace

La *transformada de Fourier*, además de ser una herramienta útil para muchas aplicaciones, tiene un significado intrínseco tal como antes lo hemos señalado. En cambio, la *transformada de Laplace*, de la que vamos a hablar a continuación, debe su interés principalmente a los diversos campos donde se aplica, ya que al menos desde el punto de vista de la *teoría de la Señal* no admite una interpretación tan clara como la de *Fourier*.

Esta nueva transformada actúa sobre funciones reales con dominio los números reales positivos y da como imágenes funciones analíticas en un semiplano complejo de la forma

$$\{z, Re\, z > \alpha\} \quad (\alpha \in \overline{\mathbb{R}}).$$

Si indicamos con $f(t)$ y $F(s)$ las funciones original e imagen en la *transformada de Laplace,* las fórmulas que las relacionan son:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma F(s)e^{st}ds, \end{aligned}$$

siendo σ cualquier recta paralela al eje imaginario contenida en el dominio de analiticidad de F.

Ya dije anteriormente que no pretendo hacer aquí ningún tratado sistemático sobre transformadas. Por ello pasaré por alto el mencionar las distintas propiedades de esta nueva transformada, limitándome solamente a su relación con la teoría de la Señal.

Esta relación es consecuencia inmediata de la conexión existente entre la *transformada de Laplace* y la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Sabemos que una ecuación del tipo anterior es de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = x(t)$$

y que junto con n condiciones iniciales independientes, a cada función $x(t)$ corresponde una única función $y(t)$ que es solución de la ecuación anterior. Pues bien esto puede interpretarse físicamente como que $y(t)$ es la respuesta a una entrada $x(t)$.

De hecho existen diversas situaciones físicas que corresponden a este modelo matemático, siendo una de las más conocidas el caso de los filtros lineales.

Ahora bien, asociada a la ecuación diferencial anterior se puede definir su polinomio característico

$$P(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$$

que juega un papel fundamental en la resolución de la ecuación.

En el caso de interpretar la ecuación como modelo matemático de un filtro el polinomio P encierra mucha información sobre el comportamiento físico del filtro siendo quizá la más notable el hecho de que el filtro es estable si, y sólo si los ceros de P tienen parte real negativa y si alguno está en el eje imaginario tiene que ser simple.

Sobre esta cuestión de estabilidad quiero citar algunos trabajos que he publicado con *P. Martínez* y con *A. Carlosena*, en los cuales proponemos nuevas técnicas para el estudio del grado de estabilidad de sistemas electrónicos realimentados. Fundamentalmente utilizamos la determinación de frecuencias de fase crítica y el comportamiento asintótico del sistema. En estos trabajos creemos mejorar las ideas de *Slogget* (1977) y de *Abuelma'atti* (1982), ya que además encontramos soluciones analíticas para el margen de ganancia en casos de mucho interés.

Núcleos

Vamos a dedicar esta sección a poner de relieve un hecho que suele presentarse en muchas de las transformadas y es la presencia de núcleos en sus dos expresiones analizante y sintetizante.

Si queremos descomponer una señal como superposición de señales elementales y luego poder sintetizarla, necesitamos una familia indexada de tales señales.

La cardinalidad del conjunto de índices nos indicará la dimensión del espacio de señales representadas por este procedimiento.

Si el conjunto de índices I es finito estamos ante un espacio vectorial con dimensión finita y el modelo matemático correspondiente consiste simplemente en la expresión de una combinación lineal finita de vectores

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i(t).$$

En este caso la fórmula analizante, es decir, la que nos proporcionan los coeficientes λ_i se obtiene mediante el producto escalar o interno

$$\lambda_i = < x, v_i >$$

Aunque pueda parecer a primera vista que este caso es muy pobre porque represente un número muy reducido de señales, el hecho es que en algunas ocasiones prácticas resulta muy útil.

Tal es el caso que ya los ingenieros habían intuido hacía tiempo asegurando que el conjunto de señales de banda limitada, de anchura de banda W y concentradas en el intervalo $(-T, T)$ estaba formado por las combinaciones lineales de $2WT$ señales independientes. Posteriormente fueron *Landau* y *Pollak* los que demostraron que esta intuición era verdadera, pero que curiosamente las señales básicas que debían tomarse no eran las de la fórmula de Shannon sino una familia de ondas esferoidales alargadas.

Una segunda posibilidad, más interesante matemáticamente, es que el conjunto de índices sea numerable. En este caso la representación de la señal es una serie

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_i v_i(t)$$

y con la fórmula de inversión idéntica al caso finito. Ahora la familia de señales así representada forma un espacio vectorial de dimensión infinita.

Señalaré dos casos especialmente interesantes en que se da esta situación:

- a)*Señales periódicas.* $v_n(t) = e^{2\pi int}$. Su desarrollo corresponde a las *series de Fourier* de las que ya hemos hablado anteriormente.
- b)*Señales de banda limitada.* $v_n(t) = sinc(t-n)$. Su desarrollo es la conocida *fórmula del muestreo.*

Finalmente en el caso de que I tenga la potencia del continuo, la expresión de la señal se hará mediante una integral y van a aparecer un par de transformadas integrales.

En principio se tiene

$$x(t) = \int_I X(s)\phi(s,t)ds$$

donde el índice $s \in I$ ha pasado a colocarse junto con la variable $t \in \mathbb{R}$. En este caso $X(s)$ representa la proporción de la componente $\phi(s,t)$ en la señal $x(t)$.

Si la fórmula inversa que pasa de la señal a su espectro es también de la forma de una integral

$$X(s) = \int_J x(t)\tau(t,s)dt$$

nos encontramos ante un par de transformadas integrales y las funciones bidimensionales $\phi(s,t)$ y $\tau(t,s)$ son llamados *núcleos simétricos.*

En el caso del par de *transformadas de Fourier*, se puede observar que los núcleos

$$\phi(s,t) = e^{2\pi ist}; \qquad \tau(t,s) = e^{-2\pi ist}$$

son además conjugados entre sí y ambos son funciones que dependen del producto st de las dos variables s y t. En general se llaman *núcleos de Fourier* todos aquéllos que verifiquen esta última propiedad.

Otro caso interesante de *núcleos de Fourier* lo proporciona el par de *transformadas de Hankel*:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^\infty u(s)\sqrt{st}J_\nu(st)ds, \\ u(s) &= \int_0^\infty x(t)\sqrt{st}J_\nu(st)dt, \end{aligned}$$

siendo J_ν la *función de Bessel* de orden ν-ésimo.

Otra posibilidad corresponde al caso en el cual el núcleo en lugar de ser función del producto de las variables lo es de su diferencia. Esto supone que todas las señales básicas se obtienen a partir de las traslaciones de una dada.

El ejemplo más conocido lo proporciona la *transformada de Hilbert*:

$$\begin{aligned} \hat{x}(s) &= \frac{1}{\pi}(VP)\int_{\mathbb{R}} \frac{x(t)}{s-t}ds, \\ x(t) &= \frac{1}{\pi}(VP)\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{x}(s)}{s-t}dt. \end{aligned}$$

Más adelante hablaremos con detalle de esta nueva transformada.

El cálculo del núcleo simétrico en un par de transformadas tipo diferencia resulta sencillo utilizando la relación entre la *transformada de Fourier* y la convolución. Basta proceder en la forma siguiente

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} u(s)\phi(t-s)ds = (u * \phi)(t)$$

de donde tomando *transformadas de Fourier*

$$X(\nu) = U(\nu)\Phi(\nu)$$

y de aquí

$$U(\nu) = \frac{X(\nu)}{\Phi(\nu)}$$

obteniendo finalmente

$$\vartheta(\nu) = \frac{1}{\Phi(\nu)}$$

cuya *antitransformada de Fourier* nos proporciona el núcleo simétrico buscado.

Podemos observar que hemos llegado a la conclusión de que en el caso de núcleos asociados a transformadas tipo diferencia se verifica que las *transformadas de Fourier* de los núcleos simétricos son inversas entre sí.

De todo lo que antecede se deduce que la *transformada de Fourier* es un útil instrumento para la búsqueda de núcleos simétricos tipo diferencia. Pero paradójicamente no resulta válida para resolver el mismo problema con núcleos tipo *Fourier*, ya que se ha perdido la convolución. Pues bien, para resolver este problema aparece una nueva transformada, la de *Mellin* que ayuda a la de *Fourier* en forma análoga a como la de *Fourier* ayuda a la de *Hilbert*.

Si indicamos con el subíndice M la *transformada de Mellin* de una función, las fórmulas correspondientes a esta transformada son

$$\begin{aligned} x_M(\nu) &= \int_0^\infty x(t)t^{\nu-1}dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma x_M(\nu)t^{-\nu}d\nu \end{aligned}$$

donde σ es cualquier recta paralela al eje imaginario contenida en el dominio de x_M.

Entonces si $x(t)$ y $u(s)$ es un par de transformadas con núcleos de tipo Fourier ϕ y ζ se verifica:

$$\begin{aligned} x_M(\nu) &= u_M(1-\nu)\phi_M(\nu) \\ u_M(\nu) &= x_M(1-\nu)\zeta_M(\nu) \end{aligned}$$

y de aquí

$$\zeta_M(\nu) = \frac{1}{\phi_M(1-\nu)}$$

relación que nos permite calcular el núcleo ζ como la *antitransformada de Mellin* de $[\phi_M(1-\nu)]^{-1}$.

Una aplicación muy interesante de estas propiedades de la *transformada de Mellin* consiste en la representación de una señal como una distribución de pulsos rectangulares.

Transformada de Hilbert

La *transformada de Hilbert* presenta interés en varios campos.

En la *teoría de señales* sirvió a *Ville* para definir lo que él llamó *frecuencia ins- tantánea* de una señal.

Observando que las dos componentes real e imaginaria de la función exponencial con exponente imaginario forman un par de *transformadas de Hilbert*, extendió este modelo a cualquier señal $x(t)$, asociándole la llamada *señal analítica* mediante la si- guiente fórmula:

$$z_x(t) = x(t) + i\hat{x}(t)$$

donde $\hat{x}(t)$ es la *transformada de Hilbert* de $x(t)$. Luego se inspiró con lo que ocurre en el ejemplo monocromático para definir la frecuencia instantánea como la derivada del argumento de la señal analítica asociada.

Y aunque resulta que esta definición de *frecuencia instantánea* resulta interesante solamente en contados casos, la idea de *señal analítica* sí que es muy útil en muchas situaciones, por ejemplo en toda la teoría sobre *filtros en cuadratura.*

Otro campo donde interviene la *transformada de Hilbert* y que lo cito porque lo he utilizado en alguna de mis investigaciones que luego indicaré, es su relación con la energía absorbida y disipada en un sistema en equilibrio sobre el que actúa una fuerza externa.

Concretamente supongamos que una fuerza $f(t)$ es aplicada sobre un sistema estable produciendo un desplazamiento $x(t)$.

Interpretemos $f(t)$ y $x(t)$ como la entrada y la respuesta en un filtro lineal cuya función de transferencia sea $G(\omega)$. Entonces se prueba que las partes real $D(\omega)$ e imaginaria $A(\omega)$ de $G(\omega)$ forman un par de *transformadas de Hilbert* y representan respectivamente la energía disipada y absorbida por el sistema como efecto de la fuerza $f(t)$.

El trabajo al que me acabo de referir en relación con este punto está contenido en varios artículos que publiqué en colaboración con el antes citado *Forniés* y con *Arcega.*

En ellos estudiamos el fenómeno de la relajación dieléctrica según el modelo de *Cole-Davidson*, y relacionamos la función de autocorrelación de la polarización de orientación con la densidad espectral de la energía. Para limitarme al tema del que veníamos hablando citaré solamente el resultado según el cual la parte real de la densidad espectral está asociada a la energía almacenada en el dieléctrico, siendo máxima dicha energía para la frecuencia típica de relajación, mientras que la parte imaginaria de la densidad espectral mide la energía disipada en el medio debido a las interacciones moleculares que presentan los dipolos eléctricos con diferentes tiempos de relajación.

Cito también otro trabajo de otra índole en el cual se utilizan simultáneamente las *transformadas de Hilbert y de Fourier*.

Éste lo realicé con el anteriormente citado *Valdizán* y fue presentado en un congreso médico en Barcelona y posteriormente publicado en Holanda. En el trabajo exponemos un método para determinar la profundidad de neuronas mediante varias mediciones en la superficie de su actividad eléctrica.

Carencias de la transformada de Fourier

A pesar del gran interés de la *transformada de Fourier* tanto para el desarrollo de la teoría matemática como en múltiples aplicaciones técnicas, adolece de un defecto desde el punto de vista de la teoría de señales.

Se trata simplemente del hecho de que la información espectral que proporciona la transformada es global y no especifica absolutamente nada de lo que pasa desde el punto de vista frecuencial en un instante determinado.

En realidad cuando la *transformada de Fourier* dice que el espectro de una señal $x(t)$ es $X(\nu)$ esto debe ser interpretado en el sentido de que superponiendo por integración infinitas señales monocromáticas cada una con frecuencia ν y amplitud $X(\nu)$ el resultado final es la señal $x(t)$ original. Pero observemos que aquí se supone que cada una de estas componentes tiene duración infinita y que en cada instante están presentes todas ellas.

La duración infinita de las señales elementales no es contradictoria con la duración finita de la señal $x(t)$. Ocurre simplemente que fuera del soporte de $x(t)$ las diversas componentes se anulan por interferencias.

Pues bien este modelo, que es totalmente correcto desde el punto de vista matemático, no parece muy convincente desde el punto de vista físico.

Pensemos por ejemplo que $x(t)$ representa una composición pianística. Si queremos interpretar dicha pieza musical con la versión matemática antes explicada, es decir aplicando literalmente la *transformada de Fourier*, harían falta infinitos pianistas, cada uno de los cuales estaría tocando monótonamente la misma nota desde menos a más infinito y constantemente con la misma intensidad, aquélla indicada por la *transformada de Fourier* para su frecuencia. Además haría falta fabricar nuevos pianos con teclas intermedias ya que como sabemos los pianos existentes solamente tienen doce teclas en cada octava (en este sentido sería más fácil interpretar una pieza de violín). Pero además sería de fundamental importancia que cada intérprete respetase la fase que también vendría indicada por el argumento de la *transformada de Fourier*.

Ya se comprende que dada la imposibilidad de verificar todos estos requisitos jamás podríamos disfrutar de escuchar ni la más mínima composición musical.

Afortunadamente para los melómanos hay otras formas para llegar al mismo resultado. Un sólo pianista, empleando un intervalo finito de tiempo, y pulsando en cada instante un número finito de teclas, puede interpretar perfectamente la pieza musical, es decir puede reconstruir la señal $x(t)$ con una superposición de señales distintas a las exigidas por la fórmula de síntesis de la *transformada de Fourier*.

Pero esta otra interpretación de los hechos nos hace ver que en realidad cuando el pianista está pulsando varias teclas simultáneamente, coexisten varias frecuencias en la señal acústica que estamos oyendo, y este conjunto de frecuencias va variando según varía la sucesión de instantes sobre el cual se extiende la señal temporal.

Para evitar caer en contradicción convendría que en este momento distinguiésemos entre frecuencia matemática, asociada a la *transformada de Fourier*, y que supone duración infinita de la señal básica monocromática y frecuencia física, que es la que nosotros percibimos y que supone duración finita de la señal básica. De esta manera no hay contradicción en el hecho de que las frecuencias presentes en el espectro de la señal no sean las mismas, según el tipo de frecuencia que estemos considerando.

Como no quiero tirar piedras contra mi tejado de matemático he de decir inmediatamente que de la anterior consideración no hemos de extraer la falsa conclusión de que la *transformada de Fourier* sea inútil. Ya he procurado insistir dentro de la brevedad de esta disertación en los múltiples campos donde se manifiesta su utilidad, pero además añadiré ahora mismo que incluso las nuevas transformadas de las que voy a hablar y que tratan de mejorar a la de *Fourier*, también se sirven de ella continuamente para su desarrollo.

Pues bien, este nuevo punto de vista físico, no coincidente con el clásico de *Fourier*, también ha sido contemplado más recientemente por las Matemáticas introduciendo nuevas transformadas que procuran ajustarse mejor al hecho físico y sensitivo en la forma como nosotros percibimos una señal.

Y es de estas nuevas transformadas de las que quiero hablar a continuación.

Como se puede suponer por todo lo que antecede, en esta familia de transformadas el rango tendrá que ser una función bidimensional, o precisando mejor de dominio tiempo-frecuencia.

Aunque han sido varios los intentos de definir tranformadas en esta dirección, aquí vamos a referirnos solamente a las dos más utilizadas. La de *Gabor* y las *wavelets*.

Transformada de Gabor

Fue introducida por el físico inglés de origen húngaro *Dennis Gabor* en la década de los cuarenta.

La idea fundamental de *Gabor* es la introducción de ventanas para poder observar la parte de la señal presente en algún entorno del punto de estudio. De esta forma se logra en primer lugar que las componentes frecuenciales de la señal en aquel instante dependan solamente de las proximidades del punto y no influyan en ellas las partes alejadas de la señal.

Como hay muchos tipos de ventanas elegibles resulta que existen muchos tipos de *transformadas de Gabor*. Esto ya constituye una diferencia notable con la *transformada de Fourier* que como sabemos es única.

Sin embargo a pesar de esta posibilidad de variada elección el propio *Gabor* ya apuntó el hecho de que el mejor candidato a ser ventana es una función gaussiana, y esto por el sencillo hecho de ser esta función la única no nula donde se alcanza la máxima concentración simultánea en tiempo y frecuencia, ya que como sabemos por el principio de incertidumbre para señales esta simultánea concentración no puede hacerse arbitrariamente grande.

Concretamente si indicamos con $g(t)$ la *ventana de Gabor* y queremos analizar una señal $x(t)$ en un punto τ, lo que hacemos es multiplicar la señal $x(t)$ por la ventana trasladada a τ y ahora aplicamos a este producto $x(t)g(t-\tau)$ la *transformada de Fourier*. De esta forma para cada par (τ, ω) obtenemos un valor

$$G(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g(t-\tau)e^{-2\pi it\omega}dt$$

que puede ser interpretado como la componente en la frecuencia ω que la señal $x(t)$ tiene en el instante τ.

De esta forma la transformada de la señal pasa a ser bidimensional, informándonos del comportamiento espectral de la señal a lo largo del tiempo.

Pero a la fórmula anterior le podemos dar un nueva interpretación como producto escalar

$$G(\tau, \omega) =< x, M_\omega T_\tau g >,$$

donde hemos indicado respectivamente con T y con M la traslación y la modulación exponencial de la ventana.

De esta forma vemos que la fórmula correspondiente al análisis en la *transformada de Gabor* tiene el mismo esquema de convolución de otras transformadas analizadas anteriormente, resultando que las señales elementales son las modulaciones de las traslaciones de la ventana elegida.

Así ocurre que todas las señales elementales tienen la misma anchura temporal (la misma de la ventana) variando unas de otras en el número de ondulaciones presentes, además, claro está, de su localización.

Este hecho que acabamos de apuntar de la constancia de la anchura en todas las señales elementales de *Gabor* es precisamente el que va a originar las wavelets, que es la última transformada de la que quiero hablar.

Pero antes voy a intercalar el estudio de otra transformada que resulta ser un instrumento muy útil para resolver algunos problemas importantes que tienen que ver con la *transformada de Gabor*.

Transformada de Zak

Nos referimos a la *transformada de Zak*.

En su versión unidimensional transforma funciones localmente integrables en $\mathbb{R}$ en funciones sobre $\mathbb{R}^2$, aunque luego resulta que dadas sus propiedades de cuasiperio- dicidad podemos suponer sin pérdida de generalidad que las funciones imágenes en la *transformdada de Zak* actúan solamente sobre el cuadrado unidad.

Concretamente si f es localmente integrable sobre $\mathbb{R}$, su transformada Zf se define en la forma

$$Zf(x,w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikw} f(x+k).$$

Son fácilmente comprobables las dos propiedades de cuasiperiodicidad siguientes:

$$\begin{aligned} Zf(x+n,w) &= e^{-2\pi inw} Zf(x,w) \\ Zf(x,w+n) &= Zf(x,w) \end{aligned}$$

siendo en ambos casos n cualquier número entero.

Aunque lleva el nombre de *Zak* por ser este autor quien la estudió más sistemáticamente, esta transformada fue también estudiada entre otros por *Weil-Brezin, Auslander-Tolimieri* e *Igusa*.

La relación entre las *transformadas de Zak* y de *Gabor* se ve claramente con el siguiente resultado:

Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ *y el llamado sistema de Gabor formado por las funciones* $\{\phi_{m,n} = M_m T_n g, m, n \in \mathbb{Z}\}$. *Entonces:*

– *a)* $\{\phi_{m,n}\}$ *es completo si, y sólo si,* $Zg \neq 0$ *(a.e.)*

– *b)* $\{\phi_{m,n}\}$ *es minimal y completo si, y sólo si,* $(Zg)^{-1} \in L^2(\mathbb{R})$

– *c)* $\{\phi_{m,n}\}$ *es base ortonormal si, y sólo si,* $|Zg| = 1$ *(a.e.)*

– *d)* $\{\phi_{m,n}\}$ *es un sistema generador estable* de cotas A y B *si, y sólo si*

$$A \leq |Zg|^2 \leq B$$

Pero la aplicación más interesante de la *transformada de Zak* está en su uso para la demostración del teorema de *Balian-Low.*

Dicho teorema está en la misma línea que el principio de incertidumbre de la Mecánica Cuántica y viene a decir que una señal $x(t)$ y su espectro $X(\nu)$ no pueden estar simultáneamente bien localizados.

Concretamente en su versión para *sistemas de Gabor* el teorema dice:

Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ *y* $\{\phi_{m,n}\}$ *el correspondiente sistema de Gabor. Entonces si* $\{\phi_{m,n}\}$ *es un sistema generador estable o bien* $tg(t)$ *o bien* $wG(w)$ *no están en* $L^2(\mathbb{R})$

La *transformada de Zak* también aparece en un contesto más general cuando se introducen los conceptos de *sistemas generadores estables* y *átomos* en unos *espacios de Banach* más amplios no necesariamente hilbertianos.

Nos referimos a los *espacios potenciales de Bessel* que se definen en la forma:

$$\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, F(w)(1 + |w|)^s \in L^2\}$$

donde $s \in \mathbb{R}$ y F es la transformada de Fourier de f.

Estos espacios son de *Banach* con la norma

$$\|f\|_s = \|F(w)(1 + |w|)^s\|_2$$

y contienen a los *espacios de Sobolev.*

Además si $s = 0$, el espacio que aparece es el clásico L^2.

En estos espacios introducimos los dos conceptos siguientes:

Sea $g \in \mathcal{L}^2_{|s|}(\mathbb{R})$ y $\{\phi_{m,n}\}$ el correspondiente *sistema de Gabor.*

– 1.- Diremos que $\{\phi_{m,n}\}$ es un *sistema generador de Banach* para $\mathcal{L}^2_s$ si, y sólo si, existen dos constantes positivas A y B tales que

$$A\|f\|_s^2 \leq \sum_{m,n} | < f, \phi_{m,n} > |^2 (1 + |m|)^2 \leq B\|f\|_s^2$$

– 2.- Diremos que $\{\phi_{m,n}\}$ es un *conjunto de átomos* para $\mathcal{L}_s^2$ si, y sólo si, existen funciones $\lambda_{m,n}$ en $\mathcal{L}_s^2$ que verifican

$$A\|f\|_s^2 \leq \sum_{m,n} |\lambda_{m,n}(f)|^2(1+|m|)^2 \leq B\|f\|_s^2$$

y tales que

$$f = \sum_{m,n} \lambda_{m,n}(f)\phi_{m,n} \qquad \forall f \in \mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}).$$

La existencia de *átomos* y *sistemas generadores de Banach* en *espacios potenciales de Bessel* es una cuestión que ha adquirido últimamente mucho interés en el Análisis y en algunos campos de la Física. Pues bien, la *transformada de Zak* nos proporciona el siguiente teorema de caracterización para ver cuando un *sistema de Gabor* es simultáneamente un *sistema generador de Banach* y un *sistema de átomos*:

Sean $a, b, s > 0$ tales que $(ab)^{-1} \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{M}^s$. Entonces el correspondiente sistema de Gabor $\{\phi_{m,n}\}$ es un sistema generador de Banach y un sistema de átomos para todo espacio potencial de Bessel $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R})$ con r de módulo menor o igual de s si, y sólo si, existen dos constantes A, B positivas de forma que

$$A \leq \sum_{j=0}^{p-1} |Zg(x, \omega + abj)|^2 \leq B$$

siendo $p = (ab)^{-1}$ y variando (x, ω) en el cuadrado unidad.

Wavelets

Volvemos a recordar que una característica de la *transformada de Gabor* es la constancia de la anchura de todos sus elementos. Pues resulta que este hecho es un inconveniente para analizar aquellas señales de duración muy breve. Tal es el caso de algunas señales sísmicas y de las señales fonéticas correspondientes a las consonantes, y éste es uno de los motivos que originó la aparición de una nueva transformada, que fue introducida en la década de los ochenta y ya se ha extendido por todo el análisis, siendo cada vez mayor el campo de sus aplicaciones. Precisamente el primero que comenzó a utilizarlas antes de que se estableciese la teoría fue el geofísico *Morlet* con motivo de unas prospecciones petrolíferas.

Nos referimos a las llamadas *ondículas*, aunque este término no está todavía completamente aceptado en la literatura castellana y se usa frecuentemente el término inglés de *wavelet*.

Esencialmente las *wavelets* se comportan en forma contraria a las señales elementales de *Gabor*, es decir, tienen el número de oscilaciones constante y lo que varía es su anchura temporal. Esta última propiedad es la que las hace más versátiles para acomodarse a señales de cualquier duración. Pero al igual que en el caso de *Gabor* hay que partir de una wavelet inicial (que suele ser llamada *wavelet madre*) y luego de ella aparecen todas las demás a partir de traslaciones y dilataciones.

Concretamente si ψ es la wavelet madre, la familia originada por ella es

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi(\frac{t-b}{a})$$

donde a y b son números reales cualesquiera, con a no nulo.

Entonces el esquema de la transformada de una señal $x(t)$ respecto de esta familia de wavelets es el mismo que el que se hace con la *transformada de Gabor*, es decir con el producto escalar

$$W(a,b) =< x, \psi_{a,b} >$$

donde como se puede observar los parámetros a y b hacen ahora los papeles análogos a los de frecuencia y tiempo.

Pero el interés de esta transformada está en que luego permite la reconstrucción de la señal $x(t)$ tomando las wavelets $\psi_{a,b}$ como señales básicas y esto exige que la wavelet madre verifique la llamada *condición de admisibilidad*

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty.$$

Ahora bien, en este proceso de reconstrucción, aparece una diferencia fundamental con la reconstrucción que puede hacerse con la *transformada de Fourier*. Si tenemos el espectro de una señal, hemos de utilizarlo en todo su soporte para recuperar la señal entera. Sólo podemos permitirnos olvidar un conjunto de puntos de medida nula del mismo. En cambio, la información de la *transformada Wavelet* de una señal es superabundante y además es fácil intuir el porqué. En realidad, cuando la *wavelet madre* y sus homotéticas se trasladan a lo largo del tiempo, cada punto es "visitado" por infinitas de ellas que van recogiendo la misma información. Esto hizo pensar a los pioneros en esta técnica en la posibilidad de restringir los valores de la transformada a subconjuntos del plano, y efectivamente se pudo comprobar fácilmente que cabe la posibilidad de elegir redes de manera que el conocimiento de los valores de la transformada en dichas redes nos permite luego recuperar enteramente la señal de partida.

Esto conectó la teoría de wavelets con una idea que ya había sido introducida por *Duffin* y *Schaeffer* en 1952, y que en la literatura inglesa se denomina como *frames* y que *García Catalán* en la tesis a la que hice referencia al principio ha llamado *sistemas generadores estables*, por motivos que se exponen en su trabajo. Precisamente en esta tesis se dedican dos capítulos a estudiar este tipo de estructuras. También en unos párrafos anteriores hemos hecho uso de este concepto y nomenclatura al hablar de los *sistemas de Gabor*.

Pero el deseo del hombre de saber es insaciable, y una vez comprobada la existencia de los sistemas generadores estables, se buscó algo aún mejor. Y es que los sistemas generadores estables en general no son bases ya que pueden no ser linealmente independientes. Lo que se buscaba era encontrar un subconjunto de wavelets que formasen base y a ser posible ortonormal.

Ya a principio de siglo, *Haar* había introducido su sistema de funciones que curiosamente verificaban todos los requisitos para formar una base ortonormal de wavelets. Pero esta base era muy insatisfactoria ya que la mala concentración espectral de las *funciones de Haar*, la hacían muy poco útil en las aplicaciones por la lenta convergencia de los algoritmos que origina.

Se puso entonces como meta que el sistema ortonormal de wavelets verificase además unas condiciones mínimas de regularidad. La tarea no fue fácil. Se llegó a pensar incluso que de hecho no existían tales bases, hasta que un buen día de 1985, el francés *Meyer*, tratando de probar su no existencia, encontró un ejemplo de tales subconjuntos, según él por casualidad. Hoy día llamamos *wavelet de Meyer* a la que origina tal subconjunto. Por cierto que muy poco tiempo después el propio *Meyer* nos habló personalmente en la Universidad Autónoma de Madrid sobre su descubrimiento con motivo de una lección de Análisis que impartió en honor del zaragozano, entonces recientemente fallecido, *José Luis Rubio de Francia*, que fue excelente alumno y posteriormente distinguido Profesor en nuestra Facultad de Ciencias.

Este descubrimiento de *Meyer* fue seguido por un rápido desarrollo de la teoría de las wavelets. Lo primero que se logró fue un método sistemático para encontrar *bases ortonormales* de wavelets, método que es llamado *Análisis Multirresolución*.

Luego han sido estudiados muchos tipos de wavelets ya que al igual que hemos indicado antes con la *transformada de Gabor*, aquí no tenemos la unicidad y rigidez que caracteriza a la *transformada de Fourier*. De esta forma una de las cuestiones interesantes con la que se encuentra uno al trabajar con wavelets consiste en elegir la más adecuada para el problema que se quiere tratar.

A pesar del corto espacio de tiempo transcurrido desde el principio de esta nueva rama de las Matemáticas, su desarrollo ha sido vertiginoso y el número de campos tanto teóricos como técnicos en los cuales se aplica es cada día mayor.

Este es el tema en el cual me encuentro actualmente trabajando en unión con el equipo de investigadores al que hice alusión al principio de este discurso.

Final

Voy a terminar ya el paseo por esta zona de las Matemáticas, llamada *Transformadas*. Aún cuando he querido limitarme solamente a aquéllas que tienen relación con la *teoría de las señales*, han quedado varias en el tintero, o mejor dicho entre las teclas del ordenador. Unas intencionadamente para no alargar en exceso esta exposición, y seguramente que algunas más por mi ignorancia.

Quiero acabar poniendo una nota localista a este discurso y para ello voy a volver a la que a mi juicio sigue siendo la reina de las Transformadas, la de *Fourier*.

A principios de siglo decía *Lord Kelvin: El teorema de Fourier no es solamente uno de los más hermosos resultados del Análisis Moderno, sino que se ha convertido en un instrumento indispensable para el tratamiento de la moderna física.*

Y para que veamos que también en nuestro país, y más concretamente en nuestra propia Universidad de Zaragoza, ya en el siglo pasado se concedía la importancia que tiene a esta transformada, citaré a *D. Gregorio Antonio García Hernández*, aragonés nacido en Monreal del Campo, que fue entre otras cosas Catedrático y Decano en la Facultad de Medicina y Presidente en dos ocasiones de la Real Academia de Medicina. Pues bien, en la lección inaugural del curso 1894-1895, *D. Gregorio* eligió el siguiente tema: *El teorema de Fourier como base de la acústica, de la audición y de la música.* De esta forma reunió en una misma disertación sus tres grandes aficiones. Era médico como lo hemos indicado antes. Estudió la carrera de Matemáticas en Valencia, y la ejerció explicando Cálculo Infinitesimal tanto en la ciudad levantina como en nuestra Facultad de Ciencias, y finalmente era músico, y de hecho cuando siendo estudiante quedó huérfano se ayudó en sus estudios paseando por los cafés de la capital del Turia tocando su violín.

HE DICHO.

Referencias

[1] Arcega F.J., Forniés J.M. y Garay J., 1982: "Comportamiento de la polarización de orientación en el modelo de relajación Cole-Davidson". *Rev. Ac. de Ciencias de Zaragoza* **37**, (33-38).

[2] Arcega F.J., Forniés J.M. y Garay J., 1983: "Densidad espectral de la energía: Modelo de relajación dieléctrica Cole-Davidson". *Actas del II Symp. Nacional de Radio Científica Internacional (URSI).* Murcia, (303-304).

[3] Benedetto J. and Frazier M., 1993: *Wavelets. Mathematics and Applications.* CRC Press.

[4] Catalán R.G., 1997: *Sistemas generadores en $L^2(\mathbb{R})$ de estructura wavelet.* Tesis doctoral. Univ. de Zaragoza.

[5] Cohen A., 1992: *Ondelettes et traitement numerique du signal.* Masson.

[6] Cooley J.W. and Tukey J.W., 1965: "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series." *Math. Comput.* **19**,(297-301).

[7] Daubechies I., 1992: *Ten Lectures on wavelets.* SIAM, Philadelphia.

[8] Davies B., 1978: *Integral transforms and their Applications.* Springer-Verlag.

[9] Duffin R. and Schaeffer A., 1952: "A class of nonharmonic Fourier series." *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, (341-466).

[10] Dym H. and McKean H.P., 1972: *Fourier Series and Integrals.* Academic Press.

[11] Franks L.E., 1975: *Signal Theory.* Prentice-Hall.

[12] Gabor D., 1946: "Theory of communications." *J. Inst. Elec. Eng.* **93**, (429-457).

[13] Garay J. and Valdizán J.R., 1984: "Localization of neuronal activity by the Hilbert Transform." *Actas de la XXII Reunión Anual de la Sociedad Española de Electroencefalografía y Neurofisiología Clínica (RAENC)* Barcelona. (35-38).

[14] Garay J. y Valdizán J.R., 1984: "Técnicas matemáticas en el estudio de la actividad bioeléctrica cerebral". *Contribuciones matemáticas en honor de Luis Vigil.* Zaragoza. (169-179).

[15] Garay J., 1991: "Algunos aspectos matemáticos de la simulación digital". *Aportaciones Matemáticas en memoria del Profesor Onieva.* Santander. (175-181).

[16] Gasquet C. et Witomski P., 1990: *Analyse de Fourier et Applications.* Masson.

[17] Janssen A., 1988: "The Zak Transform: a signal transform for sampled time-continuous signals". *Philips Journal Res.* **43**, (23-69).

[18] Landau H. and Pollak H.O., 1961: "Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty II". *The Bell System Thecnical Journal.* **40**, (65-84).

[19] Landau H. and Pollak H.O., 1962: "Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty III". *The Bell System Thecnical Journal.* **41**, (1295-1336).

[20] Martínez P. y Garay J., 1986: "Gain margin in feedback electronic systems". *Int. J. Electronics.* **60**, (361-365).

[21] Martínez P., Garay J. y Carlosena A., 1987: "Stability of negative feedback systems". *Int. J. Electronics.* **60**, (257-264).

[22] Meyer Y., 1990: *Ondelettes et operateurs.* Paris, Hermann.

[23] Slepian D. and Pollak H.O., 1961: "Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty I". *The Bell System Thecnical Journal.* **40**, (43-64).

[24] Zayed A.I., 1993: *Advances in Shannon's Sampling Theory.* CRC Press.