DISCURSO DE CONTESTACION

POR EL ACADÉMICO

ILMO. SR. D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS PALERO

Excelentísimos e Ilustrísimos Señores,

Señoras y Señores:

Con gran satisfacción cumplo el encargo que me ha hecho esta Academia de Ciencias de contestar el discurso de ingreso del Profesor don Antonio PLANS SANZ DE BREMOND, a quien me une una estrecha amistad desde su toma de posesión de la Cátedra de Geometría Analítica y Topología de esta Universidad, amistad que con el trato en el transcurso del tiempo se ha hecho más profunda. Se comprende, pues, lo grato que es para mí dar la bienvenida, en nombre de esta Corporación, a tan buen amigo y colega.

Nació el Profesor PLANS en Madrid, el 12 de enero de 1922. Después de realizar los estudios de Bachillerato entre Madrid y Manresa, pasó a la Universidad de Barcelona para estudiar la Licenciatura de Ciencias Exactas, volviendo a Madrid para estudiar el último curso de ella y obtener brillantemente el título de Doctor. Su tesis, titulada «Estudio sintético del espacio proyectivo de base no finita numerable», obtuvo el Premio Extraordinario del Doctorado.

Su historial docente comienza con un cursillo, precisamente sobre el mismo tema que el discurso que acabamos de escuchar, explicado en el curso 1944-45 en la Cátedra de Física Matemática de la Universidad de Madrid de la que era titular D. Esteban Terradas. En 1950 fue nombrado por concurso-oposición Profesor Adjunto de Geometría Analítica y Topología de la Universidad de Barcelona, Cátedra que por estar vacante desempeñó desde entonces hasta 1957, que la abandonó para venir a Zaragoza a ocupar la de la misma asignatura.

Antes de seguir adelante, vamos a hacer un resumen sistemático de su vida científica, resumen que nos descubrirá un poco los méritos que concurren en el Profesor Antonio PLANS, bastante si no completamente ocultos por su habitual modestia.

1. TÍTULOS PROFESIONALES

Licenciado y graduado en Ciencias Exactas, por la Universidad de Madrid, el 6 de julio de 1945.

Doctor en Ciencias Matemáticas, por la Universidad de Madrid, el 27 de noviembre de 1953.

2. Becas y pensiones.

Becario del Seminario Matemático de Barcelona durante dos años, siendo estudiante.
Becario de la Fundación «Conde de Cartagena» en 1944-48.
Beca de la Universidad de Madrid, cursos de 1944 a 1947.
Becario del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, dos años, 1945-47.
Becario del Patronato «Juan de la Cierva» cuatro años, 1948-52.
Nombrado colaborador de la Sección de Geometría del Seminario Matemático de Barcelona en 1948.

Beca del C.S.I.C. en 1952 para trabajar en Heidelberg (Alemania) bajo la dirección del Prof. H. Seifert sobre Teoría de Nudos, en la Sección de Matemáticas de aquella Universidad. La labor allí desarrollada dio como resultado el trabajo *Aportación al estudio de los grupos de Homología de los recubrimientos cíclicos ramificados correspondientes a un nudo.*

Beca de la Fundación «Juan March», en el año 1957, para trabajar sobre el tema *Caracterización de las matrices acotadas en el espacio de Hilbert.*

3. Premios y Honores.

Premio «Leonardo Torres Quevedo» del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1950, por el trabajo *Espacio proyectivo con base dada por una infinidad numerable.*

Premio Extraordinario del Doctorado.

4. Historial docente

Cursillo sobre *Espacios de Hilbert* en la Cátedra de Física Matemática de la Universidad de Madrid en el curso 1944-45.

Ayudante de clases prácticas en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Madrid durante los cursos 1945-46 y 1946-47.

Ayudante de clases prácticas de Geometría Analítica y Topología de la Universidad de Barcelona durante los cursos 1947-48 y 1948-49.

Profesor Adjunto interino de Geometría Analítica y Topología de la Universidad de Barcelona dos cursos, 1948-49 y 1949-50.

Profesor Adjunto por concurso-oposición, siete años, de 1950 a 1957, de la misma asignatura, Geometría Analítica y Topología de la Universidad de Barcelona.

Profesor Encargado de la Cátedra vacante de Geometría Analítica y Topología durante el mismo tiempo.

Profesor de un curso monográfico de Doctorado, en 1956-57, sobre *Espacios de Hilbert.*

Catedrático de Universidad, en la Facultad de Ciencias de la de Zaragoza, desde el 11 de mayo de 1957.

Ha formado parte de la «Comisión Nacional de Enseñanza de la Matemática en el Bachillerato», y ha asistido a las Reuniones que la citada Comisión ha ido teniendo a lo largo de los cursos 1964-66.

5. Cursos de Licenciatura que ha desarrollado en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza.

Geometría Analítica (segundo curso).
Topología (cuarto curso).

6. Cursos de Doctorado.

Espacios de Hilbert en 1961-62.
Espacios vectoriales topológicos en 1963-64 y 1965-66.
Espacios vectoriales topológicos localmente convexos en 1967-68.

7. Cursillos y Conferencias.

Cursillo sobre *Espacios de Hilbert,* en el Seminario Matemático de Zaragoza, en los cursos 1959-60 y 1960-61.

Cursillo de diez días, en septiembre de 1965, sobre la Enseñanza de Matemáticas de primero de Bachillerato, con la colaboración de D. Santiago García Atance, para profesores de dicha enseñanza. Facultad Ciencias, Zaragoza. En él se siguió el Texto Piloto, publicado por la Comisión Nacional para el mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática.

Conferencia en el Colegio Mayor Universitario La Salle (Zaragoza), el 12 de marzo de 1963, sobre *Momento actual de la Investigación Matemática.*

Conferencia en la Escuela Superior Técnica de Aquisgrán (Alemania), en julio de 1967, sobre *Über die Strahlenmenge des Hilbertraumes.*

Conferencia en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Tubinga (Alemania), en el mismo mes de 1967, bajo el título *Einige Resultate aus der Theorie des Hilbertraumes.*

Conferencia en la Universidad de Tubinga, en julio de este año, sobre el tema *Einige Probleme die mit der Strahlenmenge des Hilbert-raumes zusammenhängen.*

8. Tesis Doctorales dirigidas.

Dirección de la Tesis Doctoral de D. Bartolomé Frontera Marqués, que tiene por título *Propiedades de una función de valores enteros, definida en el conjunto de las multiálgebras finitas* (Publicaciones del Seminario Matemático García Galdeano, núm. 9, 1967). Esta Tesis fue leída el 14 de junio de 1965, obteniendo la calificación de Sobresaliente cum laude con Premio Extraordinario.

Dirección de la Tesis Doctoral de D. Victor M. Onieva Aleixandre sobre *Espacio de los rayos del Espacio de Hilbert.*

9. Cargos Universitarios.

Secretario de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza durante el período de un año.

Vicedecano de la misma durante el trienio 1964-67.

10. Centros extranjeros donde ha trabajado.

«Mathematisches Institut» de la Universidad de Heidelberg (Alemania).
«Mathematisches Institut» de la Universidad de Maguncia (Alemania).

11. Estudios e Investigaciones realizadas en el extranjero.

Ha trabajado con el Prof. Seifert, en Heidelberg, sobre *Teoría de nudos,* en el verano de 1952, en junio de 1954 a Febrero de 1955, en los meses de julio y agosto de 1955 y 1956.

Ha trabajado sobre Matrices acotadas con el Prof. Köthe de la Universidad de Maguncia.

Ha tomado parte en el Seminario de Geometría Algebráica explicado por el Profesor W. Habicht de la Universidad de Heidelberg.

Viaje de estudios a Heidelberg en el verano de 1959 y en el de 1960 para trabajar sobre Espacios vectoriales topológicos.

Viaje de estudios a Heidelberg, en 1962, con ayuda del C.S.I.C., para trabajar sobre Operadores completamente continuos y continuar sus investigaciones sobre los Operadores acotados en relación con los sistemas asintóticamente ortogonales.

Viaje de estudios a Heidelberg, en la segunda quincena de julio de 1965, para trabajar sobre Espacios vectoriales topológicos.

Viaje de estudios a Heidelberg y Maguncia, en la primera quincena de julio de 1965, para tratar con los profesores Köthe y Tillmann, de aquellas Universidades, sobre Espacios vectoriales topológicos.

12. SOCIEDADES CIENTÍFICAS A LAS QUE PERTENECE.

Real Sociedad Matemática Española.
Asociación Española para el Progreso de las Ciencias.

13. CONGRESOS Y REUNIONES CIENTÍFICAS EN QUE HA PARTICIPADO.

Congreso Matemático Internacional de Salzburgo en septiembre de 1952.

Congreso Matemático Internacional de Edimburgo en agosto de 1958. Presentó la comunicación *Zerlegung von Folgen im Hilbertraum in Heterogonalsysteme.*

Primera Reunión Anual de Matemáticos Españoles. Madrid, 1960. Presentó la comunicación *Propiedades angulares de la convergencia en el espacio de Hilbert.*

Congreso XXV Luso-Español para el Progreso de las Ciencias. Sevilla, noviembre, 1960. Presentó la comunicación *Una propiedad de los sistemas heterogonales.*

Segunda R.A.M.E., Zaragoza, octubre, 1961. Presentó la comunicación *Resultados acerca de una generalización de la semejanza en el espacio de Hilbert.*

Tercera R.A.M.E., Barcelona, noviembre, 1962. Presentó la comunicación *Los operadores acotados en relación con los sistemas asintóticamente ortogonales.*

Congreso XXVI Luso-Español para el Progreso de las Ciencias. Oporto, junio, 1962. Presentó la comunicación *Sobre los sistemas L que representan un operador completamente continuo.*

Congreso Matemático Internacional de Estocolmo en agosto de 1962. Presentó la comunicación *Ergebnisse über eine gleichmässige Verallgemeinerung des Ähnlichkeitsoperators im Hilbertraum.*

Cuarta R.A.M.E., Salamanca, diciembre, 1963. Presentó la comunicación *Una caracterización de los operadores biunívocos de doble norma finita.*

Quinta R.A.M.E., Valencia, noviembre, 1964. Presentó la comunicación *Sobre una caracterización de los operadores lineales acotados y extensiones suyas, mediante sistemas heterogonales de rayos.*

Congreso XXVII Luso-Español para el Progreso de las Ciencias, Bilbao, julio, 1964. Presentó la comunicación *Sobre la convergencia débil en el espacio de Hilbert.*

Sexta R.A.M.E., Sevilla, octubre, 1965. Presentó las comunicaciones *Sobre la continuidad uniforme angular en los operadores lineales biunívocos* y *Nuevos resultados sobre una generalización de la semejanza en el espacio de Hilbert.*

Congreso Matemático Internacional de Moscú en agosto de 1966. Presentó la comunicación *Über eine Darstellung eines beschränkten Operators, mit isometrischen und vollstetigen Operatoren.*

Octava R.A.M.E., Santiago de Compostela, octubre, 1967. Presentó la comunicación *Extensión de la dependencia lineal en el espacio de Hilbert.*

Novena R.A.M.E., Granada, noviembre, 1968. Presentó la comunicación *Nota sobre compacidad en el espacio de los rayos del espacio de Hilbert.*

Reunión de Catedráticos de Matemáticas de Universidad, Santander, julio, 1968.

14. PUBLICACIONES.

1. *Adriano María Legendre.* Matemática Elemental, vol. 6 (1946).
2. *Espacio de Hilbert de n dimensiones.* Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 40 (1946), 1-70.
3. *Espacio de Hilbert.* Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 41 (1947), 197-257.
4. *Operadores en el espacio de Hilbert y su espectro.* Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 42 (1948), 309-391.

5. *Sobre los invariantes métrico-afines de las formas cuadráticas*. Rev. Gaceta Mat., vol. 4 (1952), 248-253.
6. *Sobre la aproximación dimensional en el espacio de Kuratowski*. Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 46 (1952), 303-306.
7. *Algunas propiedades lineales de las matrices acotadas*. Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 46 (1952), 273-302.
8. *Ensayo de un álgebra lineal infinita en el campo de las matrices acotadas*. Collec. Math., vol. 5 (1952), 3-47.
9. *Una forma algebráica de la dimensión de Urysohn en el espacio de Kuratowski*. Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 7 (1952), 47-50.
10. *Aportación al estudio de los grupos de homología de los recubrimientos cíclicos ramificados correspondientes a un nudo*. Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 47 (1953), 161-193.
11. *Estudio sintético del espacio proyectivo de base no finita numerable*. C.S.I.C., Barcelona, 1956, 109 págs.
12. *Primeras propiedades de las hipercuádricas en el espacio proyectivo con base no finita numerable*. Rev. Mat. Hisp.-Amer., vol. 16 (1956), 1-27.
13. *Aportación a la homotopía de sistemas de nudos*. Rev. Mat. Hisp.-Amer., vol. 17 (1957), vol. 1-14.
14. *Un sistema de axiomas para el anillo de las matrices infinitas acotadas reales*. Collec. Math., vol. 9 (1957), 35-40.
15. *Una estructura reticular del anillo de las matrices infinitas acotadas reales*. Collec. Math., vol. 9 (1957), 87-104.
16. *El tiempo en cinemática*. Primera Reunión de Aproximación Filosófico-Científica: «El Tiempo», pág. 133. Institución Fernando el Católico, Zaragoza, 1958.
17. *Propiedades angulares de los sistemas heterogonales*. Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 14 (1959), 5-18.
18. *El espacio en topología*. Segunda Reunión de Aproximación Filosófico-Científica: «El Espacio», págs. 132-138. Institución Fernando el Católico, Zaragoza, 1959.
19. *Zerlegung von Folgen im Hilbertraum in Heterogonalsysteme*. Archiv der Math., vol. 10 (1959), 304-306.
20. *Resultados acerca de una generalización de la semejanza en el espacio de Hilbert*. Collec. Math., vol. 13 (1961), 241-258.
21. *Propiedades angulares de la convergencia en el espacio de Hilbert*. Rev. Mat. Hisp.-Amer.. vol. 21 (1961), 100-109.
22. *Sobre los operadores lineales acotados en relación con la convergencia de variedades lineales*. Collect. Math., vol. 14 (1962), 269-274.
23. *Los operadores lineales acotados en relación con los sistemas asintóticamente ortogonales*. Collec. Math., vol. 15 (1963), 105-110.
24. *Momento actual de la Investigación Matemática*. Rev. Univ. de Zaragoza, Año XL, (1963), 3-11.
25. *Sobre la convergencia débil en el espacio de Hilbert*. Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 19 (1964), 69-73.
26. *Sobre los sistemas L que representan un operador completamente continuo*. Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 19 (1964), 65-68.
27. *Sobre una caracterización de los operadores lineales acotados y extensiones suyas, mediante sistemas heterogonales de rayos*. Actas de la V Reunión Anual de Mat. Españoles, págs. 99-102. Valencia, 1964.
28. *Sobre un determinante infinito definido mediante un operador de doble norma finita*. Actas de la IV Reunión Anual de Mat. Españoles, págs. 123-129. Salamanca, 1965.
29. *Una caracterización de los operadores biunívocos de doble norma finita*. Actas de la IV Reunión Anual de Mat. Españoles, págs. 119-122. Salamanca, 1965.
30. *Sobre la representación de un operador lineal acotado, mediante operadores isométricos y completamente continuos*. Rev. Mat. Hisp.-Amer., vol. 26 (1966), 202-206.

31. *Sobre la continuidad uniforme angular, en los operadores lineales acotados biunívocos.* Actas de la VI Reunión Anual de Mat. Españoles, págs. 76-80. Sevilla, 1967.

32. *Nuevos resultados sobre una generalización de la semejanza en el espacio de Hilbert.* Actas de la VI Reunión Anual de Mat. Españoles, págs. 81-83. Sevilla, 1967.

33. *Sobre el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert.* Rev. Univ. de Zaragoza, Año XLIV (1967). 5-11.

34. *Simplificación lineal en el espacio de Hilbert.* Rev. Mat. Hisp.-Amer., vol. 28 (1968), 196-199.

35. *Dependencias lineales en el espacio de Hilbert.* Publicaciones del Seminario Mat. «García de Galdeano», núm. 10. Zaragoza, 1969, págs. 153-161.

En prensa:

36 *Nota sobre compacidad en el espacio de los rayos del espacio de Hilbert.* Actas de la IX Reunión Anual de Mat. Españoles. Granada, 1968.

15. TRADUCCIONES,

BAULE, B.: *Matemáticas Superiores para Ingenieros y Físicos, II.* (Traducción del alemán de la parte dedicada a la Geometría Diferencial, págs. 686-793).

KÖTHE, G.: *Sobre la teoría de los espacios vectoriales topológicos.* Publicaciones del Seminario Mat. de Zaragoza, núm. 1. Zaragoza, 1959. (Dirección de la traducción de un ciclo de conferencias, dado en el Seminario Mat. de Zaragoza).

HERMES, H.: *La teoría de Retículos y su aplicación a la Lógica Matemática.* Publicaciones del Seminario Mat. de Zaragoza, núm. 4. Zaragoza, 1962. (Traducción del alemán, en colaboración con D. Bartolomé Frontera, de un ciclo de conferencias dado en la Facultad de Ciencias de Zaragoza).

KRULL, W.: *Sobre ciertas categorías de grupos con topología de subgrupos.* Publicaciones del Seminario Mat. García de Galdeano, núm. 8. Zaragoza, 1966. (Traducción del alemán, en colaboración con el Dr. B. Frontera, de una conferencia pronunciada en la Facultad de Ciencias de Zaragoza).

HOCKING, J. G. and G. S. YOUNG: *Topología.* Reverté, Barcelona, 1966. (Traducción del inglés con la colaboración del Dr. B. Frontera).

Examinando las publicaciones y las otras actividades, expuestas anteriormente, del Prof. PLANS, se observa la gran atención que ha prestado al espacio de Hilbert. En efecto, concretamente, en más de veinte publicaciones ha tratado de dicho tema. Por otra parte, la autoridad alcanzada por él, en esta especialidad, queda a mi juicio suficientemente confirmada por las invitaciones que le han sido hechas desde Alemania para exponer, en varias conferencias, sus resultados. Es oportuno destacar aquí que, precisamente, Alemania es el país extranjero que más ha contribuido a su formación, siendo raro el verano que no realiza un viaje allí para ampliar sus conocimientos. No queremos concluir la exposición de estos méritos sin dejar de decir que, desde hace poco es recensor del «Zentralblatt für Mathematik».

Como la exposición que acaba de hacernos el Prof. PLANS de sus trabajos no es posible mejorarla y, por otra parte, queremos hacer alguna alusión directa a ellos, pasamos a exponer las cuestiones más importantes que han sido tratadas por él.

1. Sistemas heterogonales fuertes y sus propiedades. Este tema ha sido estudiado en las publicaciones 17 y 23.

2. Operadores que conservan la heterogonalidad fuerte: semejanza asintótica. Las publicaciones 20 y 32 tratan de este tema.

3. Caracterización de una sucesión de rayos convergente débilmente a uno dado. En la publicación 21 se estudia este tema.

4. Los operadores lineales acotados en relación con el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert. Este tema ha sido tratado en las publicaciones 26, 27, 29 y 31.

5. Representación de los operadores lineales acotados en términos de operadores isométricos. La publicación 30 trata de este tema.

6. Sistemas topológicamente libres maximales, contenidos en una sucesión dada de vectores. Este tema se estudia en la publicación 34.

7. Caracterización de la base débil. La publicación 35 trata de este tema.

8. Caracterización de la compacidad fuerte y débil, en el espacio de los rayos del espacio de Hilbert. Este tema se trata en la publicación 36, actualmente en prensa.

En la teoría de espacios de Hilbert la *teoría espectral* ocupa un lugar destacado, tanto por la importancia que tiene en sí misma como por las aplicaciones que encuentra en la Física y, en particular, en la Mecánica cuántica. Esto creo que justifica suficientemente que haga una exposición breve de ella, que amplíe en este punto el discurso que acabamos de oir.

Sea H un espacio de Hilbert y $B[H]$ el conjunto de los operadores (lineales) acotados con dominio H. Sea A un operador con dominio $D(A)$ y con conjunto imagen o recorrido $R(A)$. El *conjunto resolvente* $\rho(A)$ de A es el conjunto de los números complejos $\lambda : \lambda \in C$, tales que $\overline{R(\lambda I - A)} = H$ y $(\lambda I - A)^{-1}$ existe y es acotado en $R(\lambda I - A)$, siendo I el operador unidad. La *función resolvente* o *resolvente* de A es la función $R(\lambda ; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ definida sobre $\rho(A)$. El *espectro* $\sigma(A)$ de A es el complemento $C \setminus \rho(A)$ de $\rho(A)$.

No es difícil probar que el conjunto resolvente $\rho(A)$ es abierto y que la función $R(\lambda ; A)$ es analítica en $\rho(A)$.

Sea $A \in B[H]$ y $\mathcal{F}(A)$ la familia de todas las funciones f que son analíticas en un entorno de $\sigma(A)$. Entonces, si $f \in \mathcal{F}(A)$ y Ω es un abierto, que contiene a $\sigma(A)$, cuya frontera Γ consta de un número finito de curvas de Jordán rectificables, y tal que $\Omega \cup \Gamma$ está contenido en el dominio de analiticidad de f, se define el operador $f(A)$, así:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)\, R(\lambda ; A)\, d\lambda.$$

Cuando A es un operador cerrado no acotado, esta definición se modifica convenientemente escribiendo

$$f(A) = f(\infty)\, I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)\, R(\lambda\,;\, A)\; d\lambda.$$

Existen multitud de propiedades interesantes, relativas a las funciones $f \in \mathcal{F}(A)$ y a sus valores, pero se comprende que no pueda detenerme en ellas.

Un concepto importante es el de *conjunto espectral*, que se define como un subconjunto de $\sigma(A)$ que es, simultáneamente, abierto y cerrado.

Es de interés la siguiente clasificación del espectro:

1. *Espectro continuo de* A : $\sigma_c(A)$ es el conjunto de los $\lambda \in \sigma(A)$ tales que $\overline{R(\lambda I - A)} = H$ y $(\lambda I - A)^{-1}$ existe pero no es acotado en $R(\lambda I - A)$.

2. *Espectro residual de* A : $\sigma_r(A)$ es el conjunto de los $\lambda \in \sigma(A)$ tales que $\overline{R(\lambda I - A)} \neq H$ y $(\lambda I - A)^{-1}$ existe.

3. *Espectro puntual de* A : $\sigma_p(A)$ es el conjunto de los $\lambda \in \sigma(A)$ tales que $(\lambda I - A)^{-1}$ no existe, es decir, el conjunto de los valores propios de A.

Los espectros de los operadores normales, simétricos y autoadjuntos tienen propiedades dignas de mención. En efecto, por ejemplo, un operador A es esencialmente autoadjunto si y sólo si $\sigma(A) \subset R$.

La teoría espectral general encuentra aplicaciones importantes en los semigrupos de operadores y en la teoría ergódica, en donde los trabajos de M. H. STONE, E. HILLE, E. HOPF, G. D. BIRKHOFF y J. von NEUMANN han marcado jalones fundamentales.

Un *B-álgebra* o un *álgebra de Banach* es un espacio de Banach $\mathcal{A}$ que es un álgebra con unidad e sobre el cuerpo C de los números complejos y que tiene las propiedades $\|e\| = 1$ y $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Naturalmente, un B-álgebra se dice *conmutativa* o *abeliana* cuando $xy = yx$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}$. Una *involución* en un B-álgebra es una aplicación $x \to x^*$ de $\mathcal{A}$ en sí con las propiedades:

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \qquad (xy)^* = y^* x^*$$

$$(ax)^* = \overline{a} x^*, \qquad (x^*)^* = x.$$

El *espectro* $\sigma(\mathcal{A})$ de un B-álgebra conmutativa $\mathcal{A}$ es el conjunto de todos los ideales maximales en $\mathcal{A}$ con una topología apropiada.

Un B^*-álgebra es un B-álgebra $\mathcal{A}$ con una involución * que satisface $\|x^*x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Cualquiera que sea el espacio de Hilbert H, se prueba fácilmente que $B[H]$ es un B^*-álgebra en donde $e = I$, A^* es el operador adjunto de A y

$\|A\|$ es la norma usual del operador A. Dado un operador normal $A \in B[H]$, $B^*(A)$ es la subálgebra mínima de $B[H]$ que contiene a I, A, A^*. Es claro que entonces $B^*(A)$ es conmutativa.

El teorema de GELFAND-NAIMARK para un B^*-álgebra dice: «Todo B^*-álgebra conmutativa es isométricamente $*$-isomorfa con el álgebra $C(\wedge)$ de todas las funciones continuas sobre su espectro $\wedge = \sigma(\mathcal{A})$».

Como consecuencia de este teorema resulta que, para un operador normal $A \in B[H]$, $B^*(A)$ es isométricamente $*$-isomorfa al subálgebra $C(\sigma(A))$ y que esta isomorfía es única si se exige que al operador $A \in B^*(A)$ le corresponda la función $f \in C(\sigma(A))$ definida por $f(\lambda) = \lambda$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$.

Una *medida espectral* en un espacio de Hilbert H es un homomorfismo E de un álgebra de Boole Σ de conjuntos en un álgebra de Boole de operadores de proyección en H con la propiedad de que aplica el conjunto total $S \in \Sigma$ en el operador unidad $I \in B[H]$.

El *teorema espectral general*, para un B^*-álgebra conmutativa de operadores en un espacio de Hilbert H, completa el anterior teorema de GELFAND-NAIMARK, añadiendo que todo isomorfismo $f \leftrightarrow A(f)$ entre ambas álgebras $C(\wedge)$ y $\mathcal{A}$, determina unívocamente una medida espectral E, definida sobre la clase $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel en $\wedge$, con las siguientes propiedades:

(i) para cada $x, y \in H$ la función de conjunto $(E(\sigma)\, x, y)$, definida sobre $\mathcal{B} : \sigma \in \mathcal{B}$, es una función de conjunto contablemente aditiva regular sobre $\mathcal{B}$,

(ii) $E(\delta)\, A = AE(\delta)$ y $E(\delta) = E(\delta)^*$ para $\delta \in \mathcal{B}$ y $T \in \mathcal{A}$.

(iii) $T(f) = \int_\wedge f(\lambda)\, E(d\lambda)$ para $f \in C(\wedge)$.

Las consecuencias de este teorema son numerosas, obteniéndose así, en particular, la conocida representación

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, E(d\lambda) \quad (f \in C(\sigma(A)))$$

para un operador normal $A \in B[H]$.

Otro concepto importante, en la teoría que estamos considerando, es el de *representación espectral*. Sea A un operador normal en un espacio de Hilbert H. Sea $[\mu_i]_I$ una familia de medidas finitas, positivas y regulares sobre los conjuntos de Borel del plano complejo C. Entonces, una *representación espectral de H sobre $\Sigma_I L_2(\mu_i)$ relativa a A* es una aplicación T de H sobre $\Sigma_I L_2(\mu_i)$ con las siguientes propiedades:

(i) cada medida μ_i se anula sobre el complemento del espectro $\sigma(A)$ de A,

(ii) T es una aplicación lineal de H sobre $\Sigma_I L_2(\mu_i)$ que conserva los productos escalares,

(iii) para toda función de Borel f, acotada sobre $\sigma(A)$, se tiene

$$(T(f(A)\,x))_i\,(\lambda) = f(\lambda)\,(Tx)_i\,(\lambda)$$

para $x \in H$, $i \in I$ y μ_i-casi todo λ.

En ciertas hipótesis, un espacio de Hilbert admite representaciones espectrales relativas a un operador normal A sobre un espacio de Hilbert $L_2(\mu)$.

Vuelvo a dar la bienvenida al nuevo miembro de esta Academia, del que esperamos abundantes frutos en ella por su historial científico y sus excelentes cualidades humanas.

HE DICHO.