ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICO - QUIMICAS
Y NATURALES DE ZARAGOZA

ESPACIO DE HILBERT

DISCURSO DE INGRESO LEIDO FOR EL ACADEMICO ELECTO

ILMO. SR. D. ANTONIO PLANS SANZ DE BREMOND

EN EL ACTO DE SU RECEPCION SOLEMNE
CELEBRADO EL 9 DE NOVIEMBRE DE 1969

Y

DISCURSO DE CONTESTACION POR EL ACADEMICO

ILMO. SR. D. BALTASAR RODRIGUEZ-SALINAS PALERO

ZARAGOZA
1969

ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICO - QUIMICAS
Y NATURALES DE ZARAGOZA

ESPACIO DE HILBERT

DISCURSO DE INGRESO LEIDO POR EL ACADEMICO ELECTO

ILMO. SR. D. ANTONIO PLANS SANZ DE BREMOND

EN EL ACTO DE SU RECEPCION SOLEMNE
CELEBRADO EL 9 DE NOVIEMBRE DE 1969

Y

DISCURSO DE CONTESTACION POR EL ACADEMICO

ILMO. SR. D. BALTASAR RODRIGUEZ-SALINAS PALERO

ZARAGOZA
1969

Talleres Editoriales Librería General. Colón, 7. Zaragoza — 1969
Depósito Legal: Z. 350 — 1969

ESPACIO DE HILBERT

POR EL

ILMO. SR. D. ANTONIO PLANS SANZ DE BREMOND

Excelentísimos e Ilustrísimos Señores,

Señores Académicos,

Señoras y señores:

Es para mí un grato deber manifestar mi profundo agradecimiento, al iniciar mi discurso de ingreso en esta Academia de Ciencias, por el honor que se me hace al elegirme para formar parte de tan digna Corporación, honor que tan lejos estoy de merecer. A poco de llegar a esta ciudad de Zaragoza, a la que tan vinculado me siento, fui objeto de esta distinción, y desde entonces he tenido siempre el deseo de tomar parte en sus tareas, lo que el largo tiempo transcurrido está muy lejos de significar. Como indica el Reglamento interior de esta Academia de Ciencias, será su principal objeto «el cultivo, adelantamiento y propagación de las Ciencias y sus aplicaciones», a lo que desde ahora me propongo prestar mi colaboración personal más entusiasta, correspondiendo así al hecho de contarme entre sus miembros. A esto me obliga más y estimula la memoria de mi padre (e. p. d.), que comenzó su vida docente universitaria en esta Facultad de Ciencias (en 1909, por oposición, ganó la Cátedra de Mecánica Racional), y que figuró entre los miembros fundadores de la Academia. Ingresó en ella con fecha 27 de marzo de 1916, ocupando el cargo de secretario, en su Sección de Físico-Químicas (14 de mayo de 1916). Causó baja, como Académico numerario, por traslado a Madrid (por nueva oposición, obtuvo la Cátedra de Mecánica Celeste de la Universidad de Madrid) el 4 de noviembre de 1918, pasando entonces a ser Académico correspondiente hasta su fallecimiento, 11 de marzo de 1934. Ustedes sabrán perdonarme esta brevísima referencia a quien tanto debo (no obstante haberlo perdido a los doce años) en laboriosidad y servicio a los demás, de lo que siempre dio ejemplo, y en todos los órdenes, y que ha sido para mí un constante estímulo, recogido a través del vivo e imborrable recuerdo que guardan de él cuantos le conocieron. No es de extrañar, después de todo lo que acabo de decir para reflejar de algún modo los sentimientos que me embargan, la satisfacción que me produjo el iniciar aquí, en mi querida Facultad de Ciencias de Zaragoza, mi vida de Catedrático. Llevo ya doce años, y aunque nacido en Madrid, me he hecho completamente al modo de ser aragonés, noble y recio, que parece reflejarse en esos altos valles pirenaicos, cuya belleza he admirado en tantas ocasiones.

Junto con mi padre, fue también distinguido miembro de la Academia desde su fundación don Adoración Ruiz Tapiador, cuyo puesto en ella paso a ocupar, cabiéndome el grato deber de hacer memoria de él en mi discurso. Antes de comenzar su merecido elogio, no quiero pasar por alto la entrañable amistad que le unía a mi padre, amistad que comenzó al conocerse ambos en Zaragoza y que continuó, cada vez más profunda, en Madrid.

Don Adoración Ruiz Tapiador [25] nació en Sonseca (Toledo), el 11 de enero de 1871. Cursó con gran aprovechamiento el Bachillerato, y se licenció y doctoró, en Ciencias físico-matemáticas, en la Universidad Central. Obtuvo también la licenciatura en Farmacia. En 1902, tras brillante oposición, ganó con el número uno la Cátedra de Matemáticas del Instituto de Segunda Enseñanza de Santiago de Compostela, pasando de allí a Guadalajara, Toledo, Zaragoza y a los Institutos «Calderón de la Barca» y «San Isidro» de Madrid. Puede decirse que pasó la mayor parte de su vida profesional (1907 a 1935) en Zaragoza, en cuya Facultad de Ciencias fue durante muchos años, por oposición, Profesor auxiliar en la Sección de Exactas. Como más arriba dije, fue miembro fundador de esta Academia, y debo añadir que en ella fue tesorero durante largo tiempo, desempeñando dicho cargo con especial acierto.

Don Adoración era un excelente profesor, como recuerdan todos aquellos que asistieron a sus clases ; entre ellos debo recordar a nuestro querido amigo y colega Juan Martín Sauras (e.p.d.). Sabía hacer las Matemáticas accesibles a la mentalidad de sus alumnos, que podían seguir sus explicaciones y entender los distintos conceptos sin gran esfuerzo. Podía dar la impresión de hombre serio y distraído, pero ninguna de las dos cosas le eran aplicables. Aunque en clase apareciera externamente bajo ese aspecto de seriedad, ésta era tan sólo la de un profesor de más de un centenar de alumnos, de quienes se ha de hacer respetar, pero que ocultaba un carácter cordial y afectuoso. Y en mil ocasiones quedaba bien patente hasta qué punto se daba cuenta del comportamiento y atención de cada uno de sus discípulos, no obstante el número de ellos.

Escribió obras de texto, de Matemáticas de Bachillerato, tarea que comenzó con su vida docente. Al poner a contribución su experiencia como Catedrático, sus libros vieron sucesivas ediciones, hasta alcanzar algunos de ellos la edición dieciséis. La extraordinaria acogida que tuvieron fue buena prueba de su claridad de exposición y valor didáctico ; muchos de ellos fueron declarados de mérito por altas Corporaciones culturales, y así vemos que el Ministerio de Instrucción pública les hacía poner «declarado de mérito para los ascensos en su carrera». — J. Barinaga, en la revista *Euclides,* escribió : «Con los libros de Tapiador se alcanza un grado elevado en lo que pudiéramos llamar «interpretación española de la exposición de la Matemática en la enseñanza media» durante un largo período, eliminando las tendencias exóticas, que tardías y desnaturalizadas, habían influido tan considerablemente en nuestra literatura científica del siglo XX». — No quiero terminar este brevísimo perfil de don Adoración Ruiz Tapiador en su importante aportación a la enseñanza de la Matemática en España, sin aportar mi propia experiencia : en 1934 estudié un libro de Tapiador, en el que resaltaba la claridad de exposición a que antes aludía, y cuyo recuerdo está unido a mi primera matrícula de honor en Matemáticas.

Don Adoración Ruiz Tapiador fue distinguido con la Encomienda de Alfonso XIII y nombrado Delegado regio de Primera Enseñanza en este Distrito Universitario. El Excmo. Ayuntamiento de Zaragoza, en el que fue Teniente alcalde, le otorgó la Medalla de Oro de la ciudad.

Su traslado de Zaragoza a Madrid tuvo por razón principal el comienzo de los estudios superiores de su hijo José María (a quien me une un profundo afecto), cuya separación, con el paso de los años, no hubiera podido soportar. Cierto es que el pasar a Madrid le suponía un ascenso profesional y una mayor base de trabajo, pero esto no hubiera sido motivo suficiente para abandonar Zaragoza, a la que tanto quería.

Don Adoración Ruiz Tapiador falleció en Madrid, rodeado del cariño de todos los suyos, el día 20 de diciembre de 1943.

Paso a desarrollar el tema de «Espacio de Hilbert», en cuyo marco se encuadran la mayor parte de los trabajos que he realizado hasta la fecha. Tras un resumen histórico de dichas cuestiones, expondré algunos de los resultados más importantes de los mismos, que se refieren al conjunto de los rayos del espacio de Hilbert separable real.

ESPACIO DE HILBERT

Precedentes históricos

La teoría de los espacios de Hilbert, y la mucho más general de los espacios vectoriales topológicos, encuentra sus precedentes en distintos problemas del Análisis funcional, entre los que destaca la resolución de la ecuación de las cuerdas vibrantes. En relación con esta cuestión, aparecen dos ideas fundamentales, que a continuación exponemos, y que se deben, según parece, a D. BERNOULLI. La primera consiste en considerar la vibración de la cuerda como «caso límite» de la vibración de un sistema de n puntos materiales, cuando $n \to \infty$. Se sabe que, para n finito, este problema iba a proporcionar el primer ejemplo de valores propios de una transformación lineal.

La otra idea de Bernoulli es el *principio de superposición*, según el cual una oscilación cualquiera de la cuerda puede considerarse como resultado de la superposición de *oscilaciones propias*. Traducido al lenguaje matemático, esto significa que la solución general de la ecuación de las cuerdas vibrantes deberá admitir un desarrollo en serie $\sum_n c_n \varphi_n(x, t)$, en donde $\varphi_n(x, t)$ representan precisamente las oscilaciones propias. Como es sabido, el principio en cuestión provocó una larga discusión en torno a la posibilidad de desarrollar una función *arbitraria* en serie trigonométrica, discusión que quedó zanjada con los trabajos de FOURIER y DIRICHLET en el primer tercio del siglo XIX. Pero antes de llegar a ellos, se habían encontrado ya otros ejemplos de desarrollos en serie de funciones *ortogonales* (esta denominación no existía antes de los trabajos de Hilbert), como por ejemplo las funciones esféricas y los polinomios de Legendre. Hacia 1830, STURM [41] y LIOUVILLE [22] sistematizaron los diversos resultados en una teoría general de oscilaciones, para funciones de una variable. Considera la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\, \rho(x)\, y = 0, \quad (p(x) > 0, \quad \rho(x) > 0) \tag{1}$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y'(a) - h_1 y(a) &= 0 \\ y'(b) + h_2 y(b) &= 0, \end{aligned} \qquad (h_1 \geqq 0,\ h_2 \geqq 0,\ a < b) \tag{2}$$

y demuestran los resultados siguientes:

1) Sólo existe solución distinta de cero cuando λ es uno de los términos de una sucesión (λ_n), $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to \infty$.

2) Para cada λ_n, las soluciones son múltiplos de una misma función ν_n, que se puede considerar *normalizada*: $\int_a^b \rho\, \nu_n^2\, dx = 1$, verificándose

$$\int_a^b \rho\, \nu_m\, \nu_n\, dx = 0 \ (m \neq n). \tag{3}$$

3) Toda función f, derivable dos veces en el intervalo $[a, b]$, satisfaciendo las condiciones de contorno (2), es desarrollable en serie uniformemente convergente, $f(x) = \sum_n c_n \nu_n(x)$, donde $c_n = \int_a^b \rho\, f\, \nu_n\, dx$.

4) Se verifica la igualdad $\int_a^b \rho\, f^2\, dx = \sum_n c_n^2$ (ya demostrada formalmente en 1799 por PARSEVAL, para las funciones trigonométricas).

Medio siglo más tarde GRAM [13] completa estas propiedades y pone de manifiesto la relación entre los desarrollos en serie de funciones ortogonales y el problema de la « mejor aproximación cuadrática» : dadas las funciones $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, ésta consiste en encontrar, para una función f, la combinación lineal $\sum_i a_i \psi_i$ tal que la integral $\int_a^b \rho\, (f - \sum_i a_i \psi_i)^2\, dx$ alcance un mínimo. Gram resuelve este problema de un modo original, aplicando a las ψ_i el proceso de «ortonormalización» (conocido con el nombre de SCHMIDT). Al pasar al caso de un sistema ortonormal infinito (φ_n), se plantea la cuestión de saber cuándo tiende a cero la «mejor aproximación cuadrática» μ_n de una función f por medio de combinaciones lineales de las n primeras funciones de la sucesión, cuando n tiende a infinito. Así se llega al concepto de *sistema ortonormal completo,* y a reconocer que dicho carácter completo equivale a la no existencia de funciones $\neq 0$ ortogonales a todas las φ_n.

Las ecuaciones integrales lineales

Comienza la teoría de las *ecuaciones integrales lineales,* que contribuyó en gran medida a impulsar las ideas básicas del espacio de Hilbert. Estas ecuaciones funcionales adquirieron importancia al reducir BEER y C. NEUMANN la solución del «problema de Dirichlet» para un dominio suficientemente regular G, a la resolución de una «ecuación integral de segunda especie»

$$u(x) + \int_a^b K(x, y)\, u(y)\, dy = f(x), \tag{4}$$

en la función incógnita u. — H. POINCARE, en 1896 [31], 2, concibe la idea de introducir un parámetro variable λ delante de la integral de la precedente ecuación, y afirma que, como en la ecuación de las membranas vibrantes, la solución es entonces función meromorfa de λ. Pero no llega a probar este resultado, que no fue establecido hasta cuatro años después por I. FREDHOLM [10], en el caso de un «núcleo» K continuo y un intervalo $[a, b]$ finito.

Fredholm se deja guiar por la analogía de (4) con el sistema lineal

$$\sum_{q=1}^{n} \left(\delta_{pq} + \frac{1}{n}\, a_{pq} \right) x_q = b_p, \qquad (1 \leq p \leq n) \tag{5}$$

para llegar así a la solución de (4) como cociente de dos expresiones, construidas tomando como modelo los determinantes que aparecen en las fórmulas de Cramer. — No era nueva esta idea : desde comienzos del siglo XIX el *método de los coeficientes indeterminados* (consistente en obtener una función desconocida, supuesta desarrollable en serie $\sum c_n \varphi_n$ donde las φ_n son funciones conocidas, mediante el cálculo de los coeficientes c_n) había conducido a los sistemas de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas, de cuyo desarrollo histórico damos una idea a continuación.

Sistemas de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas

Tales sistemas son de la forma:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Fourier, que se enfrenta con un tal sistema, lo considera todavía como matemático del siglo XVIII y aplica un paso al límite de las fórmulas de Cramer. Más tarde se atacará todavía el problema mediante la teoría de los determinantes: a partir de 1886, Poincaré y después H. von Koch [19] edificarán una teoría de *determinantes infinitos*, que permite resolver ciertos tipos de sistemas (6) al modo clásico. Si bien los resultados conseguidos no eran directamente aplicables al problema visto por Fredholm, al menos es cierto que la teoría de von Koch sirvió a aquél de modelo para construir sus *determinantes*.

El posterior desarrollo de la teoría de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas se debe a E. Schmidt, F. Riesz, E. Hellinger, O. Toeplitz, J. Schauder, G. Köthe, W. Schmeidler, H. G. Tillmann y otros. Para el interesado en estas cuestiones, es muy recomendable el excelente trabajo enciclopédico titulado «Die Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten» (Leipzig, 1927), de dos discípulos de Hilbert, Hellinger y Toeplitz.

Antes de exponer sucintamente la fundamental aportación de Hilbert, creador de la teoría del espacio que lleva su nombre, objeto de esta lección, parece obligado dar algunos datos biográficos.

David Hilbert

David Hilbert nació el 23 de enero de 1862 en Königsberg (Prusia oriental). En otoño de 1880, obtuvo el título de bachiller en el «Wilhelms-Gymnasium», ingresando a continuación en la Universidad. Salvo un semestre, que siguió en Heidelberg con L. Fuchs, los estudios de Hilbert transcurrieron por entero en Königsberg. Pronto hizo una profunda amistad con Minkowski, famoso por sus investigaciones en Teoría de Números; tanto Minkowski como Hurwitz (1884) ejercieron una notable influencia en Hilbert.

El 11 de diciembre de 1884 hizo el doctorado. Como tema de tesis doctoral, le propuso Lindemann el estudio de las condiciones de invariancia de las formas transformables proyectivamente en una función esférica de orden n.

En un viaje de estudios que realizó en el invierno de 1885, tuvo contacto en Leipzig con F. Klein, con quien mantuvo desde entonces estrecha relación científica.

En junio de 1886, a los dos años de doctorarse, fue recibido en el cuerpo docente de la Universidad de Königsberg, siendo profesor adjunto (Privatdozent) en dicha Universidad hasta 1892. Fue siguiendo una marcha ascendente en la docencia, hasta que en Pascua de 1895 pasa a ser Profesor ordinario de Matemáticas en la Universidad de Göttingen (que podía considerarse entonces como capital de la Matemática alemana), a consecuencia del traslado a Estrasburgo del titular, H. WEBER, su antiguo maestro.

Muchas y diversas corporaciones científicas contaron a Hilbert entre sus miembros, y los numerosos premios con que fue galardonado son buena prueba de su valía científica. Es autor de gran número de monografías y trabajos sobre diversos temas, no sólo del dominio de la Matemática sino también del campo de la Física, en particular, de la Mecánica Cuántica [16], 2, aunque sólo vamos a destacar los resultados que se refieren al tema de la presente lección. Sus *Grundlagen der Geometrie* (1899) vieron la quinta edición en Leipzig, en 1922, y han sido traducidos a varios idiomas, al español entre ellos.

David Hilbert falleció en Göttingen en 1943.

Espacio de Hilbert de sucesiones. Operadores acotados

Fueron las investigaciones sobre ecuaciones integrales lo que condujo a Hilbert al concepto de *espacio de Hilbert de sucesiones*, H, del que a continuación damos una brevísima idea. Los elementos de H son los *vectores* $\mathbf{a}$, de infinitas coordenadas $(a_1, a_2, \ldots)$ y con norma finita $\|\mathbf{a}\| = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2)^{1/2}$. Se define entonces el producto escalar $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$ por la serie $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. La Geometría del espacio así construido presenta muchas analogías con la de un espacio vectorial unitario de dimensión finita, aunque desde luego, al pasar a infinitas dimensiones, aparecen nuevas propiedades. Por ejemplo, además de existir en H la *topología fuerte* dada por la norma ($\mathbf{a}_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathbf{a}$ significa $\|\mathbf{a} - \mathbf{a}_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$), existe la *topología débil*, dada por la convergencia del producto escalar ($\mathbf{a}_n \rightharpoonup \mathbf{a}$ significa $(\mathbf{a}_n, \mathbf{x}) \to (\mathbf{a}, \mathbf{x})$, $\forall\, \mathbf{x} \in H$).

Definimos a continuación el *operador lineal acotado* T como aquel operador lineal que verifica la condición de acotación :

$$\sup_{\mathbf{x} \in D,\ \|\mathbf{x}\| \leq 1} \|T\,\mathbf{x}\| < \infty,$$

donde D es el *dominio de definición* de T. — D es un subespacio lineal, que siempre se puede considerar cerrado, distinto o no de H. Es inmediato comprobar que la continuidad y la acotación son hechos equivalentes.

Aportación de Hilbert y de Schmidt

Hilbert publicó las investigaciones antes aludidas en seis extensos trabajos, que aparecieron en «Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen», a lo largo del período 1904-1910. Estrictamente hablando, la idea de espacio $l^2 = H$ y la teoría espectral de formas cuadráticas acotadas aparecieron en los «Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen», 5.ª y 6.ª comunicación (1906). — En la 4.ª, Hilbert estudia ecuaciones integrales de núcleo simétrico. En los primeros capítulos, desarrolla una teoría completa de esas ecuaciones, al modo clásico, desde el punto de vista de las formas cuadráticas con infinitas variables:

$$K(\mathbf{x}) = \Sigma\, k_{pq} x_p x_q, \qquad k_{pq} = k_{qp}.$$
$$p,\ q = 1,\ 2,\ \dots$$

Es de notar que Hilbert aún no habla de operadores simétricos o hermíticos, sólo trabaja con matrices y formas cuadráticas.

En el capítulo XI (seguimos la división en capítulos del libro), Hilbert introduce los conceptos de forma acotada y de forma compacta, así como el de resolvente. Desarrolla en rápidas etapas la teoría espectral de formas acotadas, dando perfectamente la representación de la *resolvente* mediante el uso de la integral de STIELTJES. De modo incidental descubre la existencia del *espectro continuo*. Sorprende el modo ingenioso con que separa la parte que resulta a partir del *espectro de puntos* y la generada por el espectro continuo. Precisamente el térmico *espectro* anticipa los hechos que vendrán alrededor de veinte años después; BORN y HEISENBERG descubrieron en 1926 que la energía de un átomo puede ser expresada por una forma cuadrática, cuyo espectro corresponde al observable mediante un espectroscopio. Es uno de los pocos casos en que la Matemática ha precedido a la Física. Y no es un hecho fortuito que la mecánica de matrices se iniciase en Göttingen.

Tras descubrir que toda forma cuadrática acotada, de infinitas variables, puede ser reducida unívocamente, por una transformación ortogonal, a la forma

$$K = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots + \int_{(s)} \frac{d\,\sigma\,(\mu,\,\xi)}{\mu},$$

Hilbert introduce las formas compactas, mostrando que pueden ser reducidas a $K(\mathbf{x}) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots$, siendo k_1, $k_2, \dots$ los inversos de los valores propios de la forma K.

Prevé Hilbert la significación de la noción de compacidad, e investiga las condiciones que caracterizan la continuidad completa de las formas cuadráticas. Emplea matrices *completamente continuas*. Precisamente fue Hilbert el primero en ocuparse de una importante clase de operadores, los operadores *completamente continuos*: un operador lineal A, definido en todo H ($D = H$), se llama completamente continuo si transforma todo conjunto acotado en un conjunto relativamente compacto (en el sentido de la convergencia fuerte). Estos operadores han recibido considerable atención en los últimos sesenta años. Su estudio se limitó ordinariamente a tipos especiales o a la investigación de propiedades comunes a todos ellos (por ejemplo, todo operador completamente continuo admite un subespacio propio invariante).

Reduce Hilbert la ecuación integral con núcleo no simétrico a un sistema de infinitas ecuaciones (tomando productos escalares) y obtiene así los tres teoremas de Fredholm.

Más tarde ejercieron gran influencia en el desarrollo de la teoría de ecuaciones integrales los trabajos de Erhard Schmidt, entre los que destaca «Auflösung allgemeiner linearen Integralgleichungen» y su conferencia de 1905, «Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener» (Math. Ann. 63, 1907). En los trabajos de Schmidt destaca la sencillez de los métodos empleados —la ortogonalización que lleva su nombre, la desigualdad de BESSEL. Precisamente debido a esa sencillez, los métodos que aplica Schmidt a modelos concretos de la teoría pueden aplicarse sin cambio alguno al caso general abstracto.

Espacio de Hilbert funcional

Influidos por las investigaciones de Hilbert, Riesz y E. FISCHER probaron el carácter completo de L^2 (validez del criterio de Cauchy para la convergencia en media, resultado que precisamente se conoce con el nombre de teorema de Riesz-Fischer), y su isomorfismo con l^2. Detengámonos en lo segundo.

Como muestran sus resultados, ya clásicos, el espacio $L^2(a, b)$ de las funciones LEBESGUE—medibles $f(x)$ en el intervalo (a, b), con norma finita $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$, es de la misma estructura que l^2 si se conviene en no considerar como distintas, funciones que sólo difieren en un conjunto de medida nula. Es decir, se pueden hacer corresponder biyectivamente los elementos de l^2 y L^2 de modo que de $\mathbf{a}_1 \leftrightarrow f_1$ y $\mathbf{a}_2 \leftrightarrow f_2$, se siga $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 \leftrightarrow c_1 f_1 + c_2 f_2$, y $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \int_a^b f_1(x) \, f_2(x) \, dx$, cualesquiera que sean los coeficientes c_1, c_2. Desde el punto de vista estructural, son ambos espacios completamente equivalentes y se pueden considerar como realizaciones del mismo espacio de Hilbert abstracto, de dimensión infinita numerable. Precisamente, se define el espacio de Hilbert abstracto $\mathscr{H}$, axiomáticamente, como a continuación se indica.

Espacio de Hilbert abstracto

Definición. — Espacio de Hilbert abstracto $\mathcal{H}$ es un conjunto de elementos abstractos $f, g, h, \ldots$ que verifican las siguientes propiedades :

A) *$\mathcal{H}$ es un espacio lineal.* Es decir, están definidas entre sus elementos las operaciones de suma y producto por números reales o complejos (respectivamente, espacio de Hilbert real o complejo), y estas operaciones siguen las reglas usuales del álgebra de vectores. En particular, existe un elemento o que es igual a $0. f$ para $\forall f \in \mathcal{H}$.

B) *$\mathcal{H}$ es un espacio métrico, con una métrica dada por un producto escalar.* Esto significa que a todo par de elementos $f, g \in \mathcal{H}$ está asociado un número (real o complejo), llamado su *producto escalar* y designado por (f, g), satisfaciendo las reglas siguientes :

$$(af, g) = a(f, g), \quad (f+g, h) = (f, h) + (g, h),$$
$$(f, g) = \overline{(g, f)}, \; (f, f) > 0 \text{ para } f \neq o, \; (f, f) = 0 \text{ para } f = o.$$

Entonces la *norma* de f se define por

$$\|f\| = (f, f)^{1/2},$$

y la *distancia* entre f y g por

$$\|f - g\|.$$

C) *$\mathcal{H}$ es un espacio completo* : si una sucesión de elementos $\{f_n\}$ de $\mathcal{H}$ satisface la condición $\|f_n - f_m\| \to 0$, para $n, m \to \infty$, existe un elemento $f^* \in \mathcal{H} \ni \|f_n - f^*\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

La *dimensión* del espacio $\mathcal{H}$ se define como el *número cardinal mínimo de un subconjunto completo de $\mathcal{H}$*, entendiendo por tal un conjunto de elementos de $\mathcal{H}$ cuyas combinaciones lineales finitas son densas en $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ es *separable*, su dimensión será finita o bien numerablemente infinita. Si es finita e igual a n, *es un espacio unitario de n dimensiones.* Si es infinita numerable, $\mathcal{H}$ se llama entonces *espacio de Hilbert propiamente dicho.* En dicho espacio existe siempre una sucesión ortonormal completa ; basta aplicar el proceso de ortogonalización de Schmidt a un subconjunto numerable completo cualquiera de $\mathcal{H}$. — La investigación de los espacios de Hilbert de dimensión no numerable ofrece gran interés, entre otras cosas, porque las funciones cuasi-periódicas forman un espacio de este tipo. Precisamente, fue la teoría de dichas funciones, tal como la estudió H. Weyl, la que sugirió la necesidad de introducir espacios unitarios no separables.

El desarrollo de la teoría del espacio de Hilbert abstracto se debe, en primer lugar, a J. von Neumann, F. Riesz y M. H. Stone. Es interesante hacer notar que dicho desarrollo ha sido impulsado en gran medida a requerimiento de la Física. En efecto, por primera vez se consiguió dar una fundamentación matemática rigurosa de la Mecánica Cuántica mediante la aplicación del espacio de Hilbert y sus transformaciones lineales.

Operadores en el espacio de Hilbert

Fue en los años 1927-30 que J. von Neumann, antes citado, colaborador de Hilbert y el primero en definir axiomáticamente el espacio hilbertiano separable abstracto, inspirado en unas lecciones de aquél sobre teoría cuántica, creó una teoría espectral completa de operadores no acotados simétricos y normales. — Precisamente, la teoría de operadores no acotados del espacio de Hilbert fue indudablemente impulsada por los progresos de la Mecánica Cuántica. Y hoy día puede asegurarse que el conocimiento de la Teoría de los operadores del espacio de Hilbert es indispensable en muchas cuestiones del Análisis y de la Física Teórica.

Hay que mencionar, en lo que a operadores se refiere, a A. WINTNER, K. FRIEDRICHS (trabajos sobre operadores semiacotados), y M. H. Stone. Aparecen en este período importantes y extensas monografías: J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (profundo análisis de los fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica) y M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert Space and their applications to analysis* (exposición completa de la teoría espectral y de los problemas referentes a extensiones autoadjuntas). Dos años después, en 1934, F. RELLICH construye una teoría de operadores hermíticos y unitarios en espacios de Hilbert no separables.

Teoría espectral

Antes de dar una idea del desarrollo histórico de esta teoría, haremos una breve introducción.

Situémonos en el espacio vectorial unitario R_n de dimensión n, y consideremos en dicho espacio una transformación lineal A, de matriz simétrica, una vez referido R_n a una base ortonormal. Entonces es sabido que existe un sistema ortonormal de n vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ y n números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ($\lambda_h \leq \lambda_{h+1}$) tales que $A\,\mathbf{a}_h = \lambda_h\,\mathbf{a}_h$; λ_h es un *valor propio* de A y $\mathbf{a}_h$ es un *vector propio* de A correspondiente a λ_h. En contra de esto, en el espacio de Hilbert separable real H existen transformaciones lineales A, representadas por una matriz infinita simétrica, para las que la ecuación $A\,\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{a}$ no se verifica para ningún vector $\mathbf{a} \in H$, cualquiera que sea el valor atribuido al parámetro λ. No obstante, el teorema de más arriba, válido en R_n, puede trasladarse a H, pero hay que formularlo de otra manera. Para ello, designemos por M_λ el subespacio de R_n subtendido por los vectores $\mathbf{a}_h \ni \lambda_h \leq \lambda$, y por E_λ la proyección ortogonal sobre M_λ: Si $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{a}_i$ es la expresión de un vector cualquiera $\mathbf{a} \in R_n$

respecto de la base ortonormal $\{\mathbf{a}_h\}$, se verifica $A\ \mathbf{a} = c_1 A\ \mathbf{a}_1 + \ldots + c_n\ A\ \mathbf{a}_n = \lambda_1 E_{\lambda_1} \mathbf{a} + \lambda_2 (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) \mathbf{a} + \ldots + \lambda_n (E_{\lambda_n} - E_{\lambda_{n-1}}) \mathbf{a}$. Esto se puede expresar bajo la forma de una integral de Stieltjes: $A\ \mathbf{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\, E_\lambda\, \mathbf{a}$, lo que conduce a la representación $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\, E_\lambda$. En esta forma, la proposición permanece válida para H; lo que ocurre es que entonces el haz de proyecciones E_λ no será, en general, una función escalonada del parámetro λ, sino que podrá variar también de un modo continuo. La así llamada *representación espectral canónica* de A es de fundamental importancia, pues refleja las propiedades estructurales de A y permite construir, a partir de ella, un cálculo de transformaciones.

En los años que siguen a 1932 aparecen nuevas demostraciones del teorema espectral e intentos de dar una solución completa a la equivalencia unitaria. Se trata esta última cuestión en los trabajos de H. HAHN, M. H. STONE, F. WECKEN, H. NAKANO, A. I. PLESSNER, W. A. ROHLIN y P. HALMOS. Hay que mencionar la aportación de K. YOSIDA (On unitary equivalence in general Euclid space), por la sencillez con que razona la equivalencia unitaria.

El mayor logro en el desarrollo de la Teoría espectral en el espacio de Hilbert, a partir de 1930, lo constituye el extenso trabajo de VON NEUMANN titulado *On rings of operators, Reduction theory*. En él VON NEUMANN introduce el concepto de integral directa de espacios de Hilbert, y demuestra el teorema espectral completo, que como se sabe, da al mismo tiempo una condición natural de equivalencia unitaria. *Los anillos de operadores* o *W*-álgebras* son las *Algebras de von Neumann* estudiadas por J. DIXMIER (terminología de J. Dieudonné). Al final de [8], 2, se encuentra abundante bibliografía en relación con el tema.

GARDING (1953-54) advirtió que el teorema espectral constituye un fondo abstracto de propiedades relativas a desarrollos en serie de funciones propias, y es de esperar que dichas propiedades jueguen un papel fundamental en el tratamiento matemático de la mecánica cuántica.

El teorema de GELFAND-NAIMARK demuestra que la analogía entre la aproximación de un operador hermítico por medio de combinaciones lineales de proyectores (teorema espectral) y la aproximación uniforme de funciones continuas mediante funciones escalonadas, no sólo no es accidental, sino que se trata de dos hechos equivalentes.

CONJUNTO DE LOS RAYOS DEL ESPACIO DE HILBERT

A continuación se exponen sucintamente los principales resultados de mis investigaciones, referentes al conjunto de los rayos del espacio de Hilbert separable real, [29], 10.

Caracterización de una sucesión de rayos convergente débilmente a un rayo dado ([29], 4)

Las condiciones necesarias y suficientes para que la sucesión de rayos $\{r_n \mid n \in N\}$ tienda débilmente al rayo $r : r_n \rightharpoonup r$, son las siguientes:

1. Para todo rayo $s \perp r$,

$$\alpha(s, r_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

2. Para *un* rayo g no perpendicular a r se verifica

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha(r_n, g) < \frac{\pi}{2}.$$

Caracterización de la compacidad fuerte y débil, en el espacio de los rayos del espacio de Hilbert ([29], 13)

Un conjunto infinito de rayos de H es débilmente compacto si y sólo si está contenido en un determinado θ-entorno angular de un subespacio E_p de dimensión finita p $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

La condición necesaria y suficiente para que un conjunto infinito de rayos C de H sea fuertemente compacto, es que cumpla la siguiente propiedad: dado θ al arbitrio $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, existe un subespacio de dimensión finita E_p en cuyo θ-entorno angular está contenido C.

Caracterización de la base débil ([29], 15).

La condición necesaria y suficiente para que una sucesión vectorial $\{\mathbf{x}_n \mid n \in N\}$ sea topológicamente libre, y con núcleo nulo:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \ldots] = \mathbf{o}, \text{ es que se verifique}$$

$$[\mathbf{x}_{p_1}, \mathbf{x}_{p_2}, \ldots] \cap [\mathbf{x}_{q_1}, \mathbf{x}_{q_2}, \ldots] = \mathbf{o} \qquad (p_i \neq q_j)$$

($\{\mathbf{x}_n \mid n \in N\}$ base débil de su envoltura lineal cerrada $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots]$).

Sistemas topológicamente libres maximales, contenidos en una sucesión dada de vectores ([29], 14).

En este trabajo considero el problema de buscar los sistemas topológicamente libres *maximales* contenidos en una sucesión vectorial dada $\{\mathbf{a}_n \mid n \in N\}$, de núcleo nulo: $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \ldots] = \mathbf{o}$. Se resuelve el problema en el caso en que se dé la siguiente condición de «uniformidad»: si $\mathbf{a}_i \notin [\mathbf{a}_{q_1}, \ldots, \mathbf{a}_{q_n}, \ldots]$, entonces $\alpha(\mathbf{a}_i, [\mathbf{a}_{q_1}, \ldots, \mathbf{a}_{q_n}, \ldots]) \geq \theta > 0$ (θ fijo).

Sistema heterogonal fuerte

Es básica la definición de sistema heterogonal de vectores $\{\mathbf{a}_n \mid n \in N\}$: 1. $\inf_i \|\mathbf{a}_i\| > 0$, $\sup_i \|\mathbf{a}_i\| < \infty$, 2. Si son $\{\mathbf{a}_{p_n} \mid n \in N\}$ y $\{\mathbf{a}_{q_n} \mid n \in N\}$ sucesiones parciales disjuntas de la dada, y son V, W sus respectivas envolturas lineales cerradas, se verifica

$$V \cap W = \mathbf{o}$$
$$V + W = H.$$

[V y W en posición *no asintótica*, [8], 1].

En [29], 1 defino el sistema heterogonal fuerte de vectores como aquel sistema heterogonal $\{\mathbf{a}_n \mid n \in N\}$ que verifica la condición $\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$, donde θ_n designa el ínfimo de los ángulos formados por las envolturas lineales cerradas de sucesiones parciales disjuntas tomadas a partir de n, es decir, contenidas en

$$\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+2}, \ldots$$

Dichos sistemas heterogonales poseen, entre otras, las siguientes propiedades:

1. Todo sistema heterogonal fuerte es conmutativo.

2. La condición necesaria y suficiente para que un sistema heterogonal $\{\mathbf{a}_n \mid n \in N\}$ sea fuerte, es que verifique

$$\alpha([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n], [\mathbf{a}_{n+1}, \ldots]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

conmutativamente.

[29], 6. Todo sistema heterogonal fuerte es asintóticamente ortogonal [v. sistema asintóticamente ortogonal, [6]].

Siguiendo en la línea de la heterogonalidad fuerte, en [29], 3 estudio los operadores lineales acotados que conservan dicha propiedad, y llego a los resultados que a continuación se exponen.

Operadores que conservan la heterogonalidad fuerte: semejanza asintótica

Sea A un operador lineal acotado, con inverso a la izquierda igualmente acotado A^{-1}. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:

a) Si A hace corresponder a los rayos $r_n, s_n (n=1,2,\ldots) \ni \alpha(r_n, s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, $\{r_n \mid n \in N\}$, $\{s_n \mid n \in N\}$ carentes de rayo de acumulación débil, los rayos r'_n, s'_n respectivamente, entonces estos últimos verifican la misma condición angular límite:

$$\alpha(r'_n, s'_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

[Esta propiedad vendrá denotada abreviadamente por $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}}$].

b) A conserva la heterogonalidad fuerte.

Se demuestra que $\overrightarrow{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\theta}$.

Llego a la siguiente caracterización:

Un operador lineal acotado A (con inverso acotado A^{-1}) posee la propiedad $\overrightarrow{\theta}$ cuando y sólo cuando verifica una ecuación de la forma

$$A^*A = k^2 I + C,$$

donde $k^2 > 0$ y C designa un operador completamente continuo. Y esto equivale a que A sea de la forma

$$A = k V + D,$$

donde D representa un operador completamente continuo, y $V \ni V^*V = I$ (isométrico).

Me ha parecido conveniente llamar al operador $k V + D$ *semejanza asintótica*.

[29], 11. Un operador acotado biunívoco A, con espacio imagen cerrado puede considerarse como «semejanza asintótica local», en el sentido siguiente: dado un subespacio lineal cerrado M de infinitas dimensiones, existe un subespacio lineal cerrado también de infinitas dimensiones $N \subset M$, en el cual la restricción $A \mid N$ es de la forma $k U + C$ ($k > 0$, U isométrico, C completamente continuo). Este resultado admite la siguiente generalización: todo operador acotado biunívoco es «localmente» de la forma $k U + C$, con $k \geqq 0$, U isométrico y C completamente continuo.

Calkin [7] ha tratado el anillo cociente del anillo de los operadores lineales acotados definidos en H, por el ideal de los operadores completamente continuos. Ha demostrado que dicho anillo cociente es isomorfo al anillo de los operadores acotados, definidos en un conveniente espacio de Hilbert $\mathcal{L}$ *no separable*. Por un tal isomorfismo, un operador de la forma $k\,V+D$ ([29], 11) tiene como imagen una *semejanza* en $\mathcal{L}$. Así tenemos, en el espacio de Hilbert no separable $\mathcal{L}$, una *semejanza* como imagen de la *semejanza asintótica*, definida en el espacio de Hilbert separable. La imagen en $\mathcal{L}$ de la propiedad $\vec{\theta}$ es precisamente la invariancia de los ángulos.

Los operadores lineales acotados en relación con el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert

1) Caracterización de los operadores acotados biunívocos, con espacio imagen cerrado, [29], 12.

Un operador acotado biunívoco tiene espacio imagen cerrado o no, según que, respectivamente, sea angularmente continuo de modo uniforme o no. Es decir, se distingue por ser o no uniformemente continuo en el espacio de los rayos de H.

2) Los operadores acotados, en relación con los sistemas topológicamente libres.

La condición necesaria y suficiente para que el operador lineal A, acotado y biunívoco, con $D_A = H$, tenga Δ_A cerrado, es que conserve los sistemas topológicamente libres.

Los operadores acotados biunívocos *se caracterizan* por conservar sus inversos los sistemas topológicamente libres.

3) Caracterización de los operadores completamente continuos, en términos de rayos.

[29], 7. Los operadores biunívocos de Hilbert-Schmidt son aquellos para los que existe un sistema heterogonal de rayos, subtendiendo H, cuya sucesión imagen converge débilmente a un cierto rayo. — De aquí resulta que los operadores completamente continuos biunívocos se caracterizan por la siguiente propiedad: para todo subespacio lineal cerrado de infinitas dimensiones M, existe una sucesión heterogonal de rayos $\{r_n \mid n \in N\}$, $r_n \in M$, cuya sucesión imagen converge débilmente a un cierto rayo.

4) Los operadores acotados biunívocos y los sistemas de rayos heterogonales.

Sea un operador acotado biunívoco A. En cuanto a su comportamiento respecto de los sistemas heterogonales de rayos, pueden presentarse los siguientes casos:

a) A conserva la heterogonalidad de los sistemas de rayos. [Equivalentemente: la imagen de un sistema heterogonal de rayos carece de rayo de acumulación débil]. El espacio imagen es cerrado, y recíprocamente.

b) Existe un sistema heterogonal de rayos, cuya imagen posee rayo de acumulación débil.

Esto puede ocurrir de dos maneras :

b') Hay un sistema heterogonal de rayos $\{r_n \mid n \in N\}$ *completo*: $[r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots] = H$, cuya sucesión imagen $\{r'_n = A\, r_n \mid n \in N\}$ converge débilmente a un cierto rayo.

Entonces A es un operador de Hilbert-Schmidt, y recíprocamente.

b'') *No existe* ningún sistema heterogonal de rayos completo en la situación anterior, pero existe al menos un sistema *no completo*, cuya sucesión imagen converge débilmente a un cierto rayo.

Hay nuevamente dos posibilidades :

b_1'') Tales sistemas se dan en todo subespacio lineal cerrado, de infinitas dimensiones.

A es completamente continuo con $|||A||| = \infty$, y recíprocamente.

b_2'') Existe un subespacio lineal cerrado V, de infinitas dimensiones, cuya imagen $A(V)$ es también un subespacio cerrado.

A *no* es completamente continuo, y su espacio imagen *no* es cerrado.

5) Acotación de operadores lineales en términos de convergencia débil de sucesiones homólogas de rayos, [29], 5.

Sea un operador lineal biunívoco $A \ni$

$$r_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} V$$

$$A\,(r_n) \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} W$$

$$\Rightarrow V \subset D_A, \qquad W \subset \Delta_A, \qquad A\,(V) = W.$$

Entonces y sólo entonces A y A^{-1} son acotados.

Sea un operador lineal A. Es acotado cuando y sólo cuando la convergencia simultánea

$$r_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} V, \qquad (r_n \subset D_A)$$

$$A\,(r_n) \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} W$$

implica

$$V \subset D_A, \qquad A\,(V) \subset W.$$

Representación de los operadores lineales acotados en términos de operadores isométricos

En mi comunicación al Congreso Matemático Internacional de Moscú (agosto 1966), [29], 9, llego a representar un operador acotado A en la forma :

$$A = \sum_i \lambda_i\, V_i + F,$$

donde λ_i son números reales, V_i operadores isométricos parciales cuyos subespacios correspondientes D_{V_i} son dos a dos ortogonales, y F es un operador completamente continuo.

Partiendo de este resultado deduzco que se puede representar un operador lineal acotado A en la forma

$$A = \sum_i \lambda_i (V P_i) + \sum_j \nu_j (V Q_j),$$

mediante un operador isométrico total V, dos sucesiones de subespacios ortogonales dos a dos (P_i, Q_j designan las respectivas proyecciones) y, respectivamente, dos sucesiones numéricas $\{\lambda_i \mid 0 < \lambda_i < k\}$, $\{\nu_j \mid \nu_j \to 0\}$, siendo de dimensión finita los subespacios del segundo sistema.

Volumen de la figura determinada por una sucesión de vectores unitarios, [29], 8

La condición necesaria y suficiente para que el volumen determinado por una sucesión de vectores unitarios $\{\mathbf{a}_n \mid n \in N\}$ sea mayor que cero, es que la matriz

$$\|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots\|$$

represente un operador, con inverso a la izquierda, de la forma $U + T$, donde $U^*U = I$, $|||T||| < \infty$.

Definición de una Topología en el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert

Dentro de mis últimas investigaciones, creo es de destacar la definición de una Topología en el conjunto de los rayos de H, cuyas sucesiones convergentes coinciden con las que lo son débilmente. Dicha topología me ha venido sugerida por la definición de entorno débil que da E. R. LORCH, [23], 2.

HE DICHO.

REFERENCIAS

[1] ACHIESER, N. I. und GLASMANN, I. M.: *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Akademie-Verlag, Berlin, (1954).

[2] BANACH, S.: *Théorie des opérations linéaires*, Varsovia, (1932).

[3] BÉLA SZ.-NAGY: *Spektraldarstellung linearer Transformationen des hilbertschen Raumes*. Springer Verlag, (1967).

[4] BERBERIAN, S. K.: *Introduction to Hilbert Space, New York Oxford University Press*, (1961). (Se encuentra en prensa la traducción de J. Sánchez Guillén, revisada por A. Plans, bajo el título «Introducción a la Teoría del Espacio de Hilbert»).

[5] BOURBAKI, N.: *Espaces vectoriels topologiques*, Actualités scientifiques et industrielles, núm. 1229, París (1955).

[6] DE BRUIJN, N. G.: *Asymptotically orthonormal sequences in Hilbert Space*, *Annals universitatis Scientiarum Budapestinensis*, Sec. Math., T. 3-4, (1960-61), p. 35-40.

[7] CALKIN, J. W.: *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space*, Ann. of Maths., T. 42, (1941), p. 839-873.

[8] DIXMIER, J.: 1. *Étude sur les Variétés et les Opérateurs de Julia, avec quelques applications*. Bull. Soc. Math. France, T. 77, (1949), p. 11-101.
2. *Les Algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)*, Paris, Gauthier-Villars, (1969).

[9] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.: *Linear Operators*, I (1958), II (1963), Interscience publ.

[10] FREDHOLM, I.: *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Mathematica, T. 27, (1903), p. 365-390.

[11] FRIEDRICHS, K.: *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren*, Math. Ann., T. 109, (1934), p. 465-487, p. 685-713, T. 110, (1935), p. 777-779.

[12] GALINDO, A.: *Representación espectral y aplicaciones a la Mecánica Cuántica*. Curso de conferencias desarrolladas en la Universidad de Madrid (1965).

[13] GRAM, J. P.: *Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate*, Journal de Crelle, T. 94, (1883), p. 41-73.

[14] GUICHARDET, A.: *Algèbres de von Neumann, algèbres topologiques et fonctions holomorphes, algèbres de Banach commutatives*, Dunod, (1968), 194 p.

[15] HELLINGER, E. und TOEPLITZ, O.: *Die Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, Encyklopädie der Math. Wiss., Teubner, (1923-1927), II. 3. 2., p. 1335-1597.

[16] HILBERT, D.: 1. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig-Berlin, Teubner (1912) (= Gött. Nachrichten, 1904, 1905, 1906, 1910).
2. *Gesammelte Abhandlungen*, 3r Tomo, Chelsea, New York, (1965).

[17] ÍÑIGUEZ, J. M.ª: *Operadores lineales en los Espacios métricos*. Memorias de la Academia de Ciencias de Zaragoza, Serie 2.ª, Memoria 1.ª, (1946).

[18] JULIA, G.: *Introduction Mathématique aux Théories Quantiques*, II, Gauthier-Villars, Paris, (1955).

[19] VON KOCH, H.: *Sur les déterminantes infinis et les équations différentielles linéaires*, Acta Mathematica, T. 16.17, (1892-93), p. 217-295.

[20] KÖTHE, G.: *Die Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum*, Math. Zeit., T. 41, (1936) p. 153-162.

[21] KREIN, M. G.: *On Bari bases of a Hilbert space*, Uspehi Mat. Nauk. (N. S.) 12 (1957), núm. 3 (75), p. 333-341.

[22] LIOUVILLE, J.: 1. *Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable*, Journal de Math., T. 1, (1836), p.253-265, T. 2, (1837), p. 16-35 y 418-436.

2. *D'un théorème dû à M. Sturm et relatif à une classe de fonctions transcendantes*, ibid. T. 1. (1836), p. 269-277.

[23] LORCH, E. R.: 1. *Bicontinuous linear Transformations in certain vector spaces*, Bull. Ann. Math. Society, (1939), T. 45, p. 564-569.

2. *Spectral Theory*, New York Oxford University Press, (1962).

[24] MACKEY, G. W.: *On infinite-dimensional linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., T. 57, (1945), p. 155-207.

[25] MARTÍN SAURAS, J.: *Necrología. D. Adoración Ruiz Tapiador*, Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza, Serie 2.ª, T. I, (1946), p. 111-113

[26] MAURIN, K.: *Methods of Hilbert Spaces*, Varsovia, (1967).

[27] NAKANO, H.: *Unitärinvarianten hypermaximaler normaler Operatoren im Hilbertschen Raum*, Ann. of Math., T. 42, (1941), p. 657-664.

[28] VON NEUMANN, J.: 1. *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, Math. Ann., T. 102, (1930), p. 370-427.

2. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, (1932).

3. *Charakteriesierung des Spektrums eines Integraloperators*, Act. Sci. et Ind., n.º 229, Paris, (1935).

4. *On rings of operators*, Reduction Theory, Ann. of Math., T. 50, (1949), p. 401-485.

[29] PLANS, A.: 1. *Propiedades angulares de los sistemas heterogonales*, Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza, T. 14, (1959), p. 5-18.

2. *Zerlegung von Folgen im Hilbertraum in Heterogonalsysteme*, Archiv der Math., T. 10, (1959), p. 304-306.

3. *Resultados acerca de una generalización de la semejanza en el espacio de Hilbert*, Collectanea Mathematica, T. 13, (1961), p. 241-258.

4. *Propiedades angulares de la convergencia en el espacio de Hilbert*, Revista Mat. H. A., T. 21, (1961), p. 100-109.

5. *Sobre los operadores lineales acotados en relación con la convergencia de variedades lineales*, Collect. Math., T. 14, (1962), p. 269-274.

6. *Los operadores acotados en relación con los sistemas asintóticamente ortogonales*, Collectanea Mathematica, T. 15, (1963), p. 105-110.

7. *Una caracterización de los operadores biunívocos de doble norma finita*, Actas de la IV Reunión de Matemáticos Españoles, Salamanca, (1965), p. 119-122.

8. *Sobre un determinante infinito definido mediante un operador de doble norma finita*, Actas de la IV Reunión de Matemáticos Españoles, Salamanca, (1965), p. 123-129.

9. *Sobre la representación de un operador lineal acotado, mediante operadores isométricos y completamente continuos*, Revista Matemática Hispano-Americana, T. 26, (1966), p. 202-206.

10. *Sobre el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert*, Revista «Universidad», número 19, (1967), p. 5-11.

11. *Nuevos resultados sobre una generalización de la semejanza en el espacio de Hilbert*, Actas de la VI Reunión de Matemáticos Españoles, Sevilla, (1967), p. 81-83.

12. *Sobre la continuidad uniforme angular en los operadores lineales acotados biunívocos*, Actas de la VI Reunión de Matemáticos Españoles, Sevilla, (1967), p. 76-80.

13. *Nota sobre compacidad en el espacio de los rayos del espacio de Hilbert*, Actas de la IX Reunión de Matemáticos Españoles, Granada, (1968), (en prensa).

14. *Simplificación lineal en el espacio de Hilbert*, Revista Mat. H. A., T. 28, (1968), p. 196-199.

15. *Dependencias lineales en el espacio de Hilbert*. Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, núm. 10, (1969), p. 153-161.

[30] PLESSNER, A.: *Über halbunitäre Operatoren*, Doklady, Acad. Sci. URSS, T. 25, (1939), p. 710-712.

[31] POINCARÉ, H.: 1. *Sur les équations de la Physique mathématique*, Rend Palermo, T. 8, (1894), p. 57-156 (= Oeuvres, T. IX, p. 123-196, Paris, Gauthier-Villars, (1954)).

2. *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet*, Acta Mathematica, T. 20, (1896,) p. 59-142, (= Oeuvres, T. 9, p. 202-272, Paris, Gauthier-Villars, (1954)).

[32] RELLICH, F.: *Spektraltheorie in nicht-separablen Räumen*, Math. Ann., T. 110, (1934), p. 342-356.

[33] RICKART, C. E.: *General Theory of Banach Algebras*. Van Nostrand. Princeton N. J. (1960).

[34] RIESZ, F.: 1. *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. T. 69, (1910), p. 449-497.

2. *Sur certains systemes singuliers d'équations intégrales*, Ann. Ec. Norm. Sup. T. 28, (1911), p. 33-62.

3. *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, Gauthier-Villars, (1913).

4. *Über lineare Funktionalgleichungen*, *Acta Mathematica*, T. 41, (1918), p. 71-98.

5. *Zur Theorie des Hilbertschen Raumes*, Acta litt. ac scient., Szeged, T. 7, (1934-35), p. 34-38.

[35] RIESZ, F. et BÉLA SZ.-NAGY: *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Paris-Budapest, (1955).

[36] SCHATTEN, R.: *Norm Ideals of completely continuous operators*, Springer-Verlag, (1960).

[37] SCHAUDER, J.: *Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen*, Studia Math., T. 2, (1930), p. 183-196.

[38] SCHMEIDLER, W.: 1. *Zum Äquivalenzproblem beschränkter Bilinearformen*, Journal r. ang. Math. T. 163, (1930), p. 135-140.

2. *Über unbeschränkt iterierbare Operatoren*, Journal r. ang. Math., T. 187, (1950), p. 109-114.

[39] SCHMIDT, E.: 1. *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Math. Annalen, T. 63, (1907), p. 433-476.

2. *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Rend. Palermo, T. 25, (1908), p. 53-77.

[40] STONE, M. H.: *Linear Transformations in Hilbert Space and their applications to analysis*, New York, (1932).

[41] STURM, C.: 1. *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre*, Journal de Math. T. 1, (1836), p. 106-186.

2. *Sur une classe d'équations à différences partielles*, ibid., p. 373-444.

[42] TILLMANN, H. G.: *Spektraltheoriefreie Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum*, Math. Zeit., T. 58, (1953), p. 85-97.

[43] WECKEN, F. J.: *Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren*, Math. Ann., T. 116, (1939), p. 422-455.

[44] WEYL, H.: *Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist*, Rend, C. M. Palermo, T. 27, (1909), p. 373-392.

2. *Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen*, Math. Ann., T. 97, (1927), p. 338-356.

[45] WINTNER, A.: *Spektraltheorie unendlicher Matrizen*. Leipzig, (1929).

[46] YOSIDA, K.: *On unitary equivalence in general Euclid space*, Proc. Japan Acad., T. 22, (1946), p. 242-245.