DISCURSO DE CONTESTACION AL ANTERIOR

por el Académico

ILMO. SR. D. RAFAEL RODRÍGUEZ VIDAL

Excelentísimos e Ilustrísimos señores,

Señoras y señores:

Con verdadera satisfacción intentaré cumplir la honrosa tarea que me ha confiado la Academia de Ciencias de Zaragoza, en cuyo nombre debo dar la bienvenida al nuevo Académico D. Baltasar RODRÍGUEZ-SALINAS PALERO y contestar al brillante discurso que acaba de leernos.

La tradición ha impuesto unas normas estrictas e invariables para esta tarea; normas acertadas, tanto como obligatorias, que yo acepto gustoso y que hoy me parecen bien fáciles de cumplir. Según ellas debe hacerse primero un relato de la vida científica del recipiendiario; y ésta en el caso presente es tan densa, que mi única dificultad será resumirla. A esto debe seguir un comentario a la bella lección que hemos oído y en verdad, que por el tema fundamental que aborda, la riqueza de ideas y la profunda habilidad de la exposición, tal vez sería oportuno sustituir el comentario por un recuerdo del clásico decir: "Esto, Inés, ello se alaba, no es menester alaballo".

Nació el Profesor RODRÍGUEZ-SALINAS en Alcalá de Henares, el año 1925. En el Instituto de Enseñanza Media de aquella localidad cursó sus estudios de bachillerato, y es justo señalar que su catedrático de Matemáticas, D. Leoncio GONZÁLEZ CALZADA, descubrió inmediatamente las excepcionales condiciones de su discípulo, tanto que fue el primero en aconsejarle la orientación a la Universidad, y presentarle a los profesores de la de Madrid, a quienes el estudiante de bachillerato sorprendía con consultas y comentarios críticos relativos, por ejemplo, a los textos de Análisis Matemático de Picard, Goursat y análogos, o con la resolución de problemas propuestos en conferencias universitarias.

Los estudios de Licenciatura y Doctorado los cursó en la Universidad de Madrid, huelga añadir que con las máximas calificaciones, y en los años 1948 y 1952 mereció los respectivos grados de Licenciado y Doctor en Ciencias Matemáticas. Entonces comienza su vida profesional, aunque la lista de sus publicaciones, como veremos, había comenzado antes, durante la etapa estudiantil. Inmediatamente después, en 1953, ingresa en el Cuerpo de Ingenieros Geógrafos y al año siguiente consigue, por oposición, la cátedra de Análisis Matemático en esta Universidad de Zaragoza. Aquí, por fortuna para nosotros, viene desarrollando desde entonces una intensa actividad docente e investigadora. Para ocuparse totalmente en su quehacer universitario, en 1955 solicitó la excedencia como Ingeniero Geógrafo, en cuyo Cuerpo tiene el título de Doctor Ingeniero.

Pero conviene retroceder un poco en el tiempo, para exponer un resumen sistemático de la vida científica de nuestro ilustre compañero (contada en lo anterior a grandes rasgos), seguida del rico sumario de sus publicaciones.

1. Títulos profesionales

Licenciado en Ciencias, Sección de Matemáticas: 13-XII-1949. Hizo constar su suficiencia en la Universidad de Madrid: 28-VI-1948.

Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas: 25-II-1954. Hizo constar su suficiencia en la Universidad de Madrid: 31-I-1952.

Catedrático de Universidad: 4-V-1954.

Ingeniero Geógrafo: 1953. Ingresó por concurso en el turno de "Licenciados en Ciencias Matemáticas o Físicas".

Doctor Ingeniero Geógrafo: 19-VI-1954.

2. Becas y Pensiones

Becario de la Fundación del Conde de Cartagena: 1946-47 y 47-48.

Becario del Instituto Jorge Juan: 1949-52.

Becario "José Miguel Guitarte", del S. E. U.: 1950- 1951 y 1952.

Becario "Matías Montero": 1953.

Beca de Intercambio Cultural con Italia durante marzo-agosto de 1951.

Pensionado por la Comisaría de Protección Escolar y Asistencia Social para trabajar en Italia durante tres meses, en el verano de 1959.

Fomento de la Investigación en la Universidad en el Plan Nacional de Desarrollo. Contrato suscrito el 21-XII-1963.

3. Premios y Honores

Premio de Matemáticas, concedido por el Sr. Ministro de E. N., en la Primera Exposición de Trabajos Prácticos de los Institutos Nacionales de Enseñanza Media: 21-VIII-1943.

Accésit al Premio Nacional Fin de Carrera: 21-XI-1948.

"Víctor de Bronce" del S. E. U.: 21-XI-1948.

Premio Extraordinario de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas.

Premio Extraordinario del Doctorado en Ciencias Matemáticas.

Premio "Alfonso el Sabio", de 1952, por el trabajo: "Sobre las funciones convexas y sus aplicaciones a la determinación del comportamiento asintótico de las transformadas de Laplace y de Laplace-Stieltjes".

Académico electo de la de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza: 20-II-1957.

Consejero Adjunto del Patronato "Alfonso el Sabio", del Consejo Superior de Investigaciones Científicas: 1959.

4. CENTROS CIENTÍFICOS DONDE HA LABORADO (excepto la Universidad)

En la "Fundación del Conde de Cartagena", con el Académico Excmo. Sr. D. José Alvarez Ude. (Real Academia de Ciencias. Madrid.)
En el Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, con el Profesor Dr. D. Ricardo San Juan. (Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid.)
En el Instituto Matemático "Ulisse Dini" de Florencia, con el Profesor Dr. Giovanni Sansone.
Seminario Matemático "García de Galdeano", de Zaragoza. Profesor Agregado, desde 1955.
Ingeniero Geógrafo. En activo: 1953-55.

5. CURSOS DE LICENCIATURA QUE HA DESARROLLADO EN LA F. DE C. DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Análisis Matemático 4.° (Titular).
Análisis Matemático 5.° (Titular).
Cálculo de Probabilidades y Estadística Matemática: 1954-64.
Topología: 1954-55.
Física Matemática: 1955-58.
Matemáticas aplicadas a la Física 1.°: 1960-62.
Matemáticas aplicadas a la Física. 2.°: 1958-59 y 1962-64.
Matemáticas Generales (Selectivo): 1959-60.

6. CURSOS DE DOCTORADO

Funciones algebraicas y sus integrales: 1954-55.
Análisis Funcional: 1955-57.
Grupos de Lie: 1957-58.
Teoría de las Distribuciones: 1958-59.
Análisis General: 1959-60.
Análisis Funcional: 1960-63.
Teoría de la medida: 1963-64.
Teoría de los Haces: 1964-65.

7. SOCIEDADES CIENTÍFICAS A LAS QUE PERTENECE

Real Sociedad Matemática Española. Desde 1942.
Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Desde 1958.
Unione Matematica Italiana. Desde 1959.
Es recensionista del "Zentralblatt für Mathematik".

8. CONGRESOS, ASAMBLEAS Y REUNIONES CIENTÍFICAS EN QUE HA PARTICIPADO

a) Congresos Luso-Españoles para el Progreso de las Ciencias:

XXIV. Madrid, noviembre, 1958. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones con los números 24, 31, 33, 34 y 35.

XXV. Sevilla, noviembre, 1960. Presentó varias comunicaciones que figuran entre los números 29, 32, 39 y 40, y otras que dieron origen a las publicaciones 25 y 41.

XXVI. Oporto, junio, 1962. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones con los números 43 y 44, y un resumen de la publicación 42.

VI. Congresso Nazionale dell'Unione Matematica Italiana. Nápoles, septiembre, 1959. Presentó una comunicación que figura como publicación número 26. Representante de la Real Sociedad Matemática Española.

International Congress of Mathematicians. Estocolmo, 1962. Presentó la comunicación: "On the area problem".

b) Reuniones Anuales de Matemáticos Españoles:

II. Zaragoza, octubre, 1961. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones con los números 36, 37 y 38.

III. Barcelona, noviembre, 1962. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones con los números 46 y 47, y otra que dio origen a la número 48.

IV. Salamanca, diciembre de 1963. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones con los números 49 y 50.

V. Valencia, octubre de 1964. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones (en prensa), números 51 a 54.

c) Reuniones de Aproximación Filosófico-Científica.

Se han venido desarrollando estas reuniones patrocinadas por la Institución "Fernando el Católico" (C. S. I. C.) en la Diputación Provincial de Zaragoza, a partir de 1957.

d) I Asamblea de Catedráticos de Facultades de Ciencias. Zaragoza, octubre, 1962.

e) Ha sido invitado a dar una Conferencia en el próximo Congreso de Matemáticos de Expresión latina, en Namur (Bélgica).

9. Conferencias y publicaciones de fin didáctico

"Espacios funcionales". Segunda Reunión de Aproximación Filosófica-Científica: "El Espacio". Institución "Fernando el Católico" (C. S. I. C.) Zaragoza, 1959 (Publicada).

"Números transfinitos". Cuarta Reunión de Aproximación Filosófica-Científica: "La Cantidad". Institución "Fernando el Católico" (C. S. I. C.) Zaragoza, 1963 (Publicada).

"Los Espacios L^p". En el Seminario Matemático de Zaragoza, 1963.

"La Teoría de las Distribuciones". En el Seminario Matemático de Zaragoza, 1963.

"Los símbolos x^y y $\log_x y$". En el Seminario Matemático de Zaragoza, 1964.

Traducción de varios artículos de la Encyclopedia of Science and Technology Mc Graw-Hill.

10. Publicaciones

1. "Determinante que da $f(x+y)$ en función de $f(x)$ y de $f(y)$". Rev. Euclides. Año II (1942), 159-162.
2. "Resto de la división en que el dividendo es $f(x)$ y el divisor $(x-a_1)^{n1}$ $(x-a_2)^{n2}\dots(x-a_h)^{nh}$". Rev. Euclides. Año II (1942), 194-195.
3. "Resolución de la ecuación funcional".

$$F(x) = \pm \frac{F\,[x + 2F(x)\,F'(x)\,(1 + F'\,(x)^2]}{1 + 2F'(x)^2}$$

Rev. Euclides. Año II (1942), 349-351.

4. "Una demostración sobre la integral de Dirichlet". Rev. Euclides. Año II (1942), página 425.
5. "Sobre un caso particular de la ecuación lineal $y' + \alpha\, y = \beta$". Rev. Euclides. Año III (1943), pág. 90.
6. "Modo de sumar algunas expresiones". Rev. Euclides. Año III (1943), 343-348.
7. "La inversión en el orden de la derivación". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 42 (1948), 37-70.

8. "Sobre la teoría de la medida". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 42 (1948), 465-491.
9. "Sobre una función meromorfa y sus aplicaciones a la suma de series". Rev. Gaceta Mat., vol. 3 (1951), 6-17.
10. "Sobre la determinación de una función analítica conocida su parte real. "Rev. Gaceta Mat., vol. 4 (1952), 44-46.
11. "Sobre el comportamiento asintótico de la aplicación reiterada de una sucesión de funciones". Rev. Gaceta Mat., vol. 4 (1952), 81-90.
12. "Sobre la región de los valores de una función lisa". Rev. Mat. Hisp.-Amer., volumen 12 (1952), 223-228.
13. "Sobre una generalización de las fórmulas de Taylor, Darboux y Euler-Mac Laurin". Rev. Mat. Hisp.-Amer., vol. 12 (1952), 281-289.
14. "Sobre varias formas de proceder en la determinación de períodos de las mareas y predicción de las mismas en un cierto lugar". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, volumen 46 (1952), 17 págs.
15. "Transformadas de Laplace de algunas funciones integrales". Rev. Garceta Mat., volumen 5 (1953), 157-158.
16. "Sobre ciertos desarrollos asintóticos de integrales de Laplace curvilíneas". Revista Mat. Hisp.-Amer., vol. 13 (1953), 120-127.
17. "Exposición de algunos teoremas conocidos y otros nuevos sobre convergencia ordinaria y uniforme de la integral de Fourier". En colaboración con Ricardo San Juan. Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 47 (1953), 495-510.
18. "Complemento a un teorema de Ahlfors-Heins sobre funciones subarmónicas". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 9 (1954), Fasc. 2.°, 119-125.
19. "Funciones con momentos nulos". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 49 (1955), 331-368.
20. "Los problemas de unicidad en la teoría de series asintóticas. Expresión de funciones semi-analíticas mediante los algoritmos de Borel y Stieltjes". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 50 (1956), 191-227.
21. "Sobre la ecuación diferencial".

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{a_0 + a_1 \cos 2x}{b_0 + b_1 \cos 2x} - \frac{m(m-1)}{\cos^2 x} - \frac{n(n-1)}{\operatorname{sen}^2 x}\right] y = 0.$$

Tesis Doctoral. Rev. Mat. Hisp.-Amer., vol. 15 (1955), 31-47, 121-135, 182-208; vol. 16 (1956), 49-71, 122-150, 229-263. Memorias de Mat. del Instituto Jorge Juan, número 18, 145 págs. (Contiene seis apéndices.)
22. "Moments de fonctions analytiques et probleme de Watson". J. de Math. Pures et Appl., vol. 9 (1956), 359-382.
23. "Ceros de las funciones de una clase no cuasi-analítica en R^n. Prolongación no cuasi-analítica". Collectanea Math., vol. 9 (1957), 65-77.
24. "Una desigualdad entre las cotas de las derivadas de una función analítica en un ángulo". Rev. Las Ciencias, de Madrid, año XXIII (1958), 533-539.
25. "Disuguaglianze tra limiti e coefficienti dello sviluppo asintotico di una funzione in un angolo". Ann. di Mat. Pura ed Appl., vol. 48 (1959), 147-159.
26. "Sulla stabilità delle soluzioni per l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti periodici". Rend. Circolo Mat. di Palermo, vol. 8 (1959), 206-224.
27. "Aproximación uniforme de una función continua por un conjunto convexo de funciones continuas". Coller. Math., vol. 11 (1959), 175-202.
28. "Equivalenza di classi di funzioni con sviluppo asintotico in un angolo. Funzionì caratteristiche". Boll. Unione Mat. Italiana, vol. 14 (1959), 525-531.
29. "Sobre la estabilidad de la ecuación funcional $f(x + y) = f(x) + f(y)$". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 14 (1959), Fasc. 1.°, 5-7.
30. "Variación de las raíces características de una ecuación diferencial de segundo

orden con coeficientes periódicos". Ann. di Mat. Pura ed Appl., vol. 52 (1960), 107-161.

31. "Solución de un problema de Bang de la teoría de clases cuasi-analíticas". Rev. Las Ciencias, de Madrid, año XXV (1960), 257-261.

32. "Sobre el cambio de variable en las integrales múltiples". Collec. Math., vol. 12 (1960), 139-153.

33. "Una fórmula asintótica para algunas transformadas de Laplace", Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 54 (1960), 177-187.

34. "Un desarrollo asintótico de ciertas transformadas de Laplace". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 54 (1960), 167-176.

35. "Funciones que verifican en cada punto de un intervalo a una ecuación diferencial variable con el punto". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 54 (1960), 301-311.

36. "Estabilidad y ceros de las soluciones de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes periódicos". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 15 (1960), Fasc. 2.°, 5-9.

37. "Solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 16 (1961), Fasc. 1.°, 47-51.

38. "Existencia de puntos de Weierstrass de funciones reales. Máximos y mínimos en espacios casi numerablemente compactos". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 16 (1961), Fasc. 2.°, 5-10.

39. "Conjunto de valores de un coeficiente diferencial". Collec. Math., vol. 13 (1961), 3-13.

40. "Crecimiento de una función analítica en un ángulo". Collec. Math., vol. 13 (1961), 197-217.

41. "Existencia de máximo de funciones reales continuas en espacios casi numerablemente compactos. Ann. di Mat. Pura ed Appl., vol. 56 (1961), 375-413.

42. "Generalización sobre módulos del teorema de Hahn-Benach y sus aplicaciones" Collec. Math., vol. 14 (1962), 105-151.

43. "Sobre el último teorema de Fermat y la ecuación".

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^n u}{\partial z^n}$$

Rev. Fac. de Ciencias de Lisboa, vol. 9 (1962), 35-44.

44. "Una generalización de los teoremas de von Staudt y Darboux". Rev. Fac. de Ciencias de Lisboa, vol. 9 (1962), 77-86.

45. "Clases de funciones analíticas. Clases semi-analíticas y cuasi-analíticas". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 17 (1962), Fasc. 1.°, 5-75. Publicaciones del Seminario Mat. "García de Galdeano", número 6, Zaragoza, 1962.

46. "Crecimiento de una función analítica en una banda de anchura no constante". Collect. Math., vol. 15 (1963), 5-22. Actas de la III Reunión Anual de Mat. Españoles.

47. "Una clase de grupoides: tribus. Inmersión en una tribu". Collectanea Math., volumen 15 (1963), 153-167. Actas de la III Reunión Anual de Mat. Españoles.

48. "El problema de la extensión". Ann. di Mat. Pura ed Appl., vol. 64 (1964), 133-189.

PUBLICACIONES EN CURSO:

49. "Sobre la prolongación de funcionales lineales". Actas de la IV Reunión de Mat. Españoles. Collecth. Math.

50. "El método de iteración en la teoría de puntos fijos". Actas de la IV Reunión de Mat. Españoles. Rev. Mat. Hisp.-Amer.

51. "Sobre la ecuación funcional $f(x + y) = f(x)\,f(y)$ y las funciones a^x y $\log_a x$". Actas de la V Reunión Anual de Matemáticos Españoles. Rev. Mat. Hisp.-Amer.

52. "Construcción de medidas de Borel sobre los espacios regulares". Actas de la V Reunión Anual de Matemáticos Españoles.

53. "La cantidad en la Teoría de la Medida". Actas de la V Reunión Anual de Matemáticos Españoles.

54. "Sobre los cuerpos no conmutativos de rango cuatro respecto de su centro". (En colaboración con D. José GARAY DE PABLO.) Actas de la V Reunión Anual de Matemáticos Españoles.

La recensión de todos estos trabajos va quedando escrita paulatinamente en las páginas del "Mathematical Reviews" y del "Zentralblatt für Mathematik" y no es posible ni resumirla aquí. Varios de ellos se citan en tratados tan importantes como son, por ejemplo, el de G. DOETSCH: *"Handbuch der Laplace-Transformation"* y el de G. AUMANN: *"Reelle Funktionen"* (ambas de la Springer-Verlag-Berlín).

Nos parece oportuno hacer observar que los trabajos iniciales de esta relación fueron publicados mientras el autor era estudiante. Realmente, la historia de la ciencia nos muestra, que la creación intelectual en los grandes matemáticos, aunque no de tan extremada precocidad como la de algunos grandes músicos, sí es mucho más juvenil de lo que ordinariamente se cree. No puedo resistir la tentación de exponer, al margen de esto, mi discutible opinión personal, de que es muy culpable de la languidez de la vida científica patria, en el concierto internacional, la circunstancia de que nuestros planes de estudios y funestos exámenes diversos impiden a nuestra juventud una actividad intelectual original hasta una edad demasiado avanzada. Desde su primera juventud, un alumno normal debería poder cultivar algunas ideas por cuenta propia, mientras que las reglamentaciones dichas, altamente coactivas, hacen que esto sólo sea posible para las mentes de calidad excepcional, como ha sido sin ninguna duda, el caso del señor R.-SALINAS.

Se observará también, que varios de estos trabajos fueron publicados en la Revista de nuestra Academia de Ciencias, lo que naturalmente, trae consigo que al recibir esta Corporación al autor, la acogida sea más realmente afectiva.

Una tercera observación es que ninguno de estos trabajos sea de los llamados de exposición, ni tan siquiera de síntesis. Se trata en todos ellos de temas de investigación pura y en ningún caso elementales (salvo los primeros, de la época escolar). El Prof. R.-SALINAS parece incapaz de acercarse a ningún tema en una forma trivial, y la lección que acaba de desarrollar lo confirma, aunque en esta ocasión, muy acertadamente, haya hecho ciertas concesiones al concepto de lo que los no matemáticos llaman amenidad. Y prescindo de otras observaciones espontáneas, porque esta última acaba de llevarnos al comentario de la lección inaugural, con el que pobre pero reglamentariamente debe concluir nuestra intervención.

* * *

Una frase que la genial concertista Wanda LANDOWSKA gustaba de repetir dice: "No se sabe nunca bien toda la música que hay en un minué". Era fácil la paráfrasis y preguntarnos: "¿Quién sabrá verdaderamente cuánta Matemática hay en una "regla de tres?" Y por cierto, que si en esta reflexión mencionábamos la regla de tres por ser segura parcela del saber común que desde la más primaria enseñanza se juzga dominado, no es menos cierto que para el caso que nos ocupa resulta su alusión especialmente oportuna.

La "regla de tres" es el fruto que todos alcanzamos de la teoría de la proporcionalidad; su manifestación evidente; la base de cualquier práctica usual de medida. En la entraña de la regla de tres, sin embargo, está la ecuación funcional de la proporcionalidad, $f(Cx)=Cf(x)$, de todos conocida, al menos en su apariencia formal; y si no todos sí muchos, conocen la íntima relación de ella con la ecuación funcional $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Pero en esta relación todos los matemáticos (ya no todas las gentes) saben bien que hay bastante tema de estudio; tanto, que hasta el fondo de la cuestión no todos han sabido llegar. Ahora, bastará ver los trabajos dedicados a este tema por nuestro nuevo compañero, para admitir sin dificultad que entre los pocos que sepan casi todo lo que hay que saber sobre la regla de tres está el Prof. RODRÍGUEZ SALINAS. Además, como se ve en lo que nos ha dicho, la aserción $f(x + y) = f(x) + f(y)$ no es sino el principio del asunto. Pues aunque la generalización al caso $f(\sum_{1}^{n} (x_i))$ no trae nada esencialmente distinto, aparece finalmente la condición de aditividad infinita, $f(\sum_{i \in I} x_i) = \sum_{i \in I} f(x_i)$ que nos lleva a la primeras dificultades.

Simultáneamente a las mayores exigencias de las condiciones planteadas en el problema de la medida (o, por mejor decir, indisolublemente unidas con estas exigencias) está el creciente grado de generalidad y de abstracción de las entidades a las que se aplica. Esas x se parecen cada vez menos a los puntos y otras entidades de la geometría euclídea.

No intentaré repetir la síntesis de la cuestión, que el Prof. R.-SALINAS ha hecho inmejorablemente.

Es claro que sólo en una etapa de ingenuidad pre-científica pueden admitirse como satisfactorias, esto es, claras por sí mismas, las expresiones que aseguran, por ejemplo, que la línea es la figura que sólo tiene una dimensión; que la medida de una línea es su longitud; que la superficie es el límite de un cuerpo y el área es la medida de una superficie; con otras muchas de este tipo escolar. Sin embargo, el examen crítico de estas nociones no aportó ningún resultado cualitativo importante hasta el siglo pasado.

Consideremos primero el caso de una línea. Una especulación sistemática debe comenzar por preguntarse qué cosa es una línea o curva, y luego será el momento de preguntarse qué es longitud de la curva. Pero ocurre, que ya la respuesta a la primera pregunta trae consigo novedades y sorpresas, que hacen más difícil contestar a la segunda, como vamos a ver.

Para ganar en simplicidad, consideremos el caso de una curva plana. Intuitivamente aparece como un conjunto de puntos que se dirían obtenidos de un hilo flexible y elástico, deformándolo convenientemente. Esto se traduce de modo más técnico en decir que "curva" es un conjunto de puntos en correspondencia con los puntos de un segmento. Pero también es preciso meditar qué condiciones debe reunir esta correspondencia para que la "curva" así definida sea una entidad siquiera parecida a la que ordinariamente se entinde por curva. Eso mismo, dicho analíticamente, equivale a representar la "curva" paramétricamente mediante un par de ecuaciones de la forma

$$x = \alpha(t) \qquad y = \beta(t) \qquad a \leq t \leq b$$

y a preguntarnos cómo han de ser estas funciones α, β para que la condición antedicha de parecido intuitivo sea satisfecha. Es oportuno notar que esas fórmulas tienen también una interpretación física evidente interpretando el parámetro t como el tiempo y, en ese caso, la "curva" como "trayectoria" de una partícula: las ecuaciones paramétricas dan su posición en el instante t.

Pues bien, si no se exigen especiales condiciones a esta correspondencia, que es decir a estas funciones, el aspecto del conjunto de puntos que resulta puede ser completamente distinto de una curva intuitiva. Un notable ejemplo lo presentó PEANO en 1890 al publicar su ejemplo de "curva" que llenan todo un cuadrado, en un artículo breve, de muy pocas y muy claras páginas, que es de los que más rápida sensación produjeron en el mundo matemático, por su elegante novedad.

Antes de esto había obtenido JORDÁN un notable resultado. Si las funciones α, β son uno a uno y continuas, la curva se llama un arco simple o arco de Jordán. Si además es $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\beta(a) = \beta(b)$, la curva se llama curva cerrada de Jordán. Esta curva cerrada ya tiene con las curvas intuitivas una semejanza muy importante, y es ésta: dividir al plano en dos regiones de modo que no se puede ir de una a otra sin atravesar esa línea. Pero todavía esta curva puede ser más singular de lo que se espera: puede no tener tangente en ningún punto y puede también, y esto es lo importante aquí, no ser rectificable, es decir, no tener longitud.

Esta es, en efecto, la pregunta que nos interesa ahora: ¿qué es longitud de una curva? Los matemáticos supieron desde siempre que este concepto no es primitivo y podríamos decir que desde el nacimiento del cálculo integral, y más todavía después de CAUCHY, los matemáticos plantearon con rigor el paso al límite que implica la definición de longitud, y también el método para calcularla. Sin embargo, en los siglos XVII y XVIII, aplicaron el método a curvas definidas por funciones "buenas" (KLEIN), es decir, que no daban origen a las curvas patológicas, post-intuitivas, cuya existencia no se sospechaba antes de WEIERSTRASS y JORDÁN.

Por lo que hace a las superficies, los problemas anteriores aparecen, naturalmente, agravados. Pero ahora queremos aludir sólo a otra paradoja elemental, que aparece sin salir de las superficies más regulares y ordinaias, como la superficie de un cilindro por ejemplo. El área, en efecto, no puede definirse como límite de las de superficies poliédricas inscritas cuyas caras tienden a cero en todas las dimensiones. Esto lo puso de relieve SCHWARZ; esta dificultad se vence con una definición adecuada, que el cálculo integral enseña, y esa definición permite calcular el área para una superficie; al menos si es lo bastante regular, sin que nos ocupemos de precisar más las condiciones que ésto exige.

Por lo que hace al cálculo de volúmenes, podemos mencionar una nueva dificultad, puesta de relieve por HILBERT y PASCH. En efecto, así como en las esquinas de un paralelogramo no podemos adaptar un cuadrado por pequeño que éste sea, pero esto no implica dificultad grave para definir el área porque podemos fácilmente recortarlo y convertir ese paralelogramo en un rectángulo, o de un modo general: dos polígonos cualesquiera de igual área son equidescomponibles, en cambio en las figuras del espacio no ocurre tal cosa. La no equidescomponibilidad de un cubo y de un tetraedro regular, por ejemplo, trae nuevas dificultades a la construcción rigurosa de la teoría de los volúmenes; y esto es ya tan al principio de la Geometría métrica del espacio que está reflejada en simples textos elementales escritos con rigor y preocupación: el de HADAMARD, por ejemplo.

Pero las dificultades que hasta aquí hemos mencionado para establecer el concepto y la medida de longitud, área y volumen, no salen de un plano elemental, por cuanto afectan verdaderamente a conjuntos y figuras formadas por puntos que no difieren demasiado de los puntos y figuras ordinarias de la geometría euclídea... sean ellos lo que fueren.

No abandonemos todavía el "punto" ordinario que ha manejado la Matemática clásica. Un nuevo aumento de generalidad se consigue cuando se manejan conjuntos de puntos distribuidos, no en líneas, superficies o volúmenes más o menos regulares o "patológicos", sino formando conjuntos de otros tipos, como pueden ser, para empezar, los conjuntos de puntos con coordenadas racionales (sea esto en la recta, el plano o el espacio). Conjuntos que, y esto es curioso, no son sólo creados por el gusto arbitrario de los matemáticos, sino que aparecen impuestos a éstos por el mismo desarrollo natural de las teorías del Análisis matemático. Para estos conjuntos de puntos ¿puede definirse algo parecido a la medida de las líneas, superficies o volúmenes ordinarios?

En primer lugar, esta nueva medida, si se consigue, debe ser tal, que cuando el conjunto de puntos coincida con un segmento, superficie o volumen en el sentido clásico, su medida se identifique con la longitud, área o volumen ordinarios. Sin esta condición de permanencia la pretendida generalización no sería más que un juego sin sentido. Además, la pretendida medida debe reunir las naturales condiciones de aditividad y satisfacer a las exigencias complementarias que se impongan.

Pues bien, el problema fue resuelto bastante satisfactoriamente durante el medio siglo que se centra hacia el año 1900. Para no repetir una doctrina e historia que el precedente discurso resume perfectamente, baste una referencia a los nombres de PEANO, JORDÁN, CANTOR, BOREL y LEBESGUE, que representan bastante expresivamente el desarrollo de esta etapa clásica de la teoría de medida de conjuntos.

En resumen ¿de qué entidades podemos decir que tienen una extensión, una medida del contenido? La verdadera calidad y trascendencia de la pregunta se aprecia al dejar este espacio concreto, casi físico, de la matemática clásica, y situarnos en el punto de vista abstracto y general a que la conferencia del profesor R.-Salinas acaba de llevarnos. No deja de ser paradójico, y sea esta la última paradoja de que se habla hoy, que el problema de la medida no haya podido ser planteado en toda su profundidad hasta el momento en que la matemática puede pensar en no considerarse más la "ciencia de la cantidad" que dice la definición escolástica.

Efectivamente, el proceso de abstracción y generalidad, que según muchos es la esencia de la Matemática, ha llevado de modo inevitable a la creación de los espacios abstractos. El concepto de espacio abstracto es el de un conjunto con una estructura que generalice la noción de espacio físico, pero ¿cuál es la nota intuitiva de este espacio físico que se ha considerado necesario trasladar a la estructura nueva para que ésta no sea una pura entelequia? ¿Es acaso la noción de distancia? De ninguna manera. Lo que los matemáticos han exigido a *su creación* es bien leve: que permita una generalización de la noción de continuidad. En ese mismo momento pasó la Topología a desempeñar un primer papel en toda la estructuración de la Matemática actual. (He vacilado un poco en si sería mejor decir "estructuración actual de la Matemática" o estructuración de la Matemática actual; y esto es por no saber ya del todo si la Matemática "es" algo más que su propia estructuración. Pero sería inoportuno prolongar estas observaciones marginales). Llevados así, de un modo natural, a matematizar un espacio topológico abstracto, cuánto nos falta por saber sobre las ideas de medida, extensión y contenido, es lo que nos acaba de descubrir el nuevo Académico en su valioso trabajo.

La Academia de Ciencias de Zaragoza, que se da cuenta perfecta de la importancia de las ideas que el Sr. Rodríguez-Salinas ha aportado ya en este campo de la investigación, y de la trascendencia que pueden llegar a tener sus futuras investigaciones en el mismo, se honrará grandemente si puede ofrecerle una atmósfera intelectual apta para favorecer la elaboración de tan prometedora obra.

He dicho.