

D-79-292/6

ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS, QUIMICAS
Y NATURALES DE ZARAGOZA

EL DISCRETO ENCANTO DEL CAOS

DISCURSO DE INGRESO LEIDO POR EL ACADEMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. JAVIER SESMA BIENZOBAS

*EN EL ACTO DE SU RECEPCION SOLEMNE
CELEBRADO EL DIA 17 DE FEBRERO DE 1999*

Y

DISCURSO DE CONTESTACION POR EL

Excmo. Sr. D. HORACIO MARCO MOLL

PRESIDENTE DE LA ACADEMIA



ZARAGOZA

1999

ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS, QUIMICAS
Y NATURALES DE ZARAGOZA

EL DISCRETO ENCANTO DEL CAOS

DISCURSO DE INGRESO LEIDO POR EL ACADEMICO ELECTO

Ilmo. Sr. D. JAVIER SESMA BIENZOBAS

*EN EL ACTO DE SU RECEPCION SOLEMNE
CELEBRADO EL DIA 17 DE FEBRERO DE 1999*

Y

DISCURSO DE CONTESTACION POR EL

Excmo. Sr. D. HORACIO MARCO MOLL

PRESIDENTE DE LA ACADEMIA



ZARAGOZA

1999

Depósito legal: Z. 228 - 1999

Imprime:

Sdad. Coop. Librería General
Pedro Cerbuna, 23
50009 Zaragoza

EL DISCRETO ENCANTO DEL CAOS

POR EL

Ilmo. Sr. D. JAVIER SESMA BIENZOBAS

Excelentísimo Señor Presidente,
Excelentísimos e Ilustrísimos Señora Académica y Señores Académicos,
Señoras y Señores:

Antes que nada, es mi deber, con el que gustosamente cumplo, manifestar mi sincero agradecimiento a los miembros de esta Academia que en su día pensaron en mí para ocupar una de las vacantes de la misma. No sé si acertaré a estar a la altura del honor que eso supone. Pero de lo que sí pueden estar todos seguros es de que me esforzaré todo lo posible por conseguirlo.

Como algunos de los presentes ya conocen, y los demás pueden muy bien imaginarse, la lectura del discurso de ingreso en la Academia produce una tremenda emoción. No en vano viene a constituir la culminación de una vida dedicada al estudio. Esa emoción, en mi caso, se ve acentuada por el hecho de que ingresar en esta Academia supone colaborar y compartir tareas con los que fueron mis maestros, los Académicos D. Rafael Cid y D. Juan Sancho. (Permítaseme aquí recordar a D. Justiniano Casas y a D. Antonio Plans, también mis maestros, fallecidos después del comienzo de la preparación de este discurso.) Decía que esos distinguidos Académicos fueron mis maestros, y también mis examinadores en las asignaturas de la Licenciatura. Y en este momento siento como si volvieran a examinarme de nuevo, pero con la diferencia de que entonces yo era un inconsciente joven de menos de 20 años en tanto que ahora rondo los 60. Confío en que muestren en esta ocasión la misma benevolencia hacia mí que la vez anterior. De todos modos, sea cual sea la calificación que al final me asignen, vaya por delante mi gratitud por lo mucho que han contribuido, no sólo con sus enseñanzas, sino también con su ejemplo, a mi formación. ¡Gracias! De verdad.

Al parecer, si este discurso es considerado suficiente, me espera llevar la medalla número 3 de esta Academia, la que en el momento de su fundación en 1916 ostentaba D. Pedro Ayerbe, mi predecesor en ese honor. Poco he podido saber de ese Académico Fundador. Y aun eso se lo debo al celo del Excmo. Sr. Presidente, que ha indagado exhaustivamente en las Actas de la Academia. Ha averiguado que D. Pedro Ayerbe pertenecía al Servicio Hidrológico-Forestal de la época y que su actividad profesional se desarrolló sobre todo en la corrección de torrenteras en la zona pirenaica de la provincia de Huesca. Tras su fallecimiento, en fecha que no puedo precisar, su puesto en la Academia ha permanecido vacante. Lamento no poder dar por el momento una semblanza más completa de mi ilustre predecesor, pero, si la generosidad de los señores Académicos me permite unirme a ellos, prometo dedicar mis primeros esfuerzos a completar su biografía.

El título de este discurso, paráfrasis del de una película del insigne cineasta aragonés Luis Buñuel, sugiere que pretendo hacer una apología del caos. Y eso puede resultar paradójico después de más de treinta y cinco años de dedicación a la enseñanza de las leyes de la Física, o más bien de las simetrías o armonías de la Naturaleza de las que esas leyes son consecuencia. Efectivamente, pretendo mostrar aquí que el caos, además de poseer aspectos de gran belleza desde el punto de vista matemático, no presenta contradicción con las leyes de la Física, y que, por lo tanto, no hay paradoja.

Antes de seguir adelante, debo confesar que no soy experto en este tema, ni muchísimo menos, y que personas de la audiencia que tienen conocimientos muy superiores a los míos, podrían sin duda hacer una presentación mucho más profunda, y al mismo tiempo amena, que la mía. Discúlpese mi atrevimiento, pero no soy sino un recién llegado al estudio del tema, al que he sido conducido de la mano de un colega, Miguel Paramio, actualmente en la Universidad de León, y que si algo he progresado ha sido gracias al excelente trabajo de otro colega de la Universidad de Zaragoza, Mario Floría, en un curso de Doctorado cuyas notas, sumamente claras y acertadas, me han permitido vislumbrar las ideas básicas y las manifestaciones fundamentales del caos. Y lo que intento hoy aquí es simplemente contagiar a los no iniciados el entusiasmo que han despertado en mí las fascinantes facetas del caos. Si lo consigo, el mérito es de los antedichos colegas; si no, la culpa es exclusivamente mía. Además, en la preparación de este discurso me he aprovechado abundantemente de un artículo de MOSER [9] sobre la estabilidad del Sistema Solar, una monografía de BARROW-GREEN [1] acerca de Poincaré y el problema de tres cuerpos, el delicioso libro de SCHROEDER [15] acerca de los sorprendentes aspectos del caos y el excelente texto de RAÑADA [13] sobre Dinámica Clásica.

¿Qué es el caos? Prescindiendo de consideraciones etimológicas, todas las personas, instruídas o no, tenemos una idea intuitiva de lo que es el caos. Algunos incluso tenemos modelos de caos en casa. A mí me basta abrir la puerta de la habitación de mi hijo para contemplar un caos espléndido. Y eso que él es músico y lo suyo es la armonía. Pero, bromas aparte, ¿qué se entiende por caos o, mejor, por comportamiento caótico en el mundo de la Ciencia? Antes de dar respuesta a esta pregunta vamos a hacer un breve repaso histórico del modo en que la Ciencia se ha enfrentado con el estudio de la Naturaleza.

Un poco de Historia

Si se analiza el pensamiento humano a lo largo de los tiempos, se observa cómo el hombre se ha debatido entre el azar y el determinismo, con una clara preferencia por este

último. Junto a fenómenos de una gran regularidad, como los ciclos diario, lunar y anual, se presentaban otros totalmente impredecibles a largo plazo, como las lluvias y los vientos, o incluso a muy corto plazo, como los rayos. Para los primeros el hombre buscaba leyes, expresadas en forma matemática, a las que obedecían y que posibilitaban la predicción. Para los segundos no era posible encontrar tales leyes; pero, en la convicción de que la Naturaleza era inevitablemente determinista, su aparente aleatoriedad se consideraba simplemente como un reflejo de nuestro desconocimiento. Lo único que ha variado a lo largo del desarrollo de la civilización es qué es lo que nos resulta desconocido y asociamos por tanto con el azar.

Para los antiguos eso desconocido era la voluntad de los dioses mitológicos, que podían lanzar rayos o desatar tempestades a su capricho con el objeto de ayudar o perjudicar, según sus predilecciones, a los humanos. Y éstos se veían en la necesidad de escrutar, con la ayuda de augures, los designios de esos dioses y ofrecerles sacrificios para mantenerlos propicios. Esa intervención de los dioses determinaba algo aparentemente tan aleatorio como el comportamiento de los mortales, hasta el punto de que éstos eran incapaces de escapar de su sino, argumento principal de las sobrecogedoras tragedias griegas.

En la Edad Media, con el predominio en el mundo conocido de las religiones monoteístas, en las que no cabían las rivalidades entre dioses, se fué imponiendo la idea de la existencia de leyes fijas e inmutables, impuestas por el Ser Supremo para regir todos los fenómenos, y cuyo inexorable cumplimiento sólo su autor podía impedir y aún eso nada más que en casos excepcionales (milagros). No obstante, dichas leyes, que se suponían diferentes para cada tipo de fenómenos, eran en su mayor parte o bien desconocidas o, como mucho, formuladas sólo cualitativamente. Eso restringía fuertemente el poder predictivo de la Ciencia de la época. En lo que concierne al comportamiento humano, se aceptaba mayoritariamente el libre albedrío, aunque no sin fuertes controversias teológicas acerca de la predestinación. La conocida obra de Tirso de Molina de título *El condenado por desconfiado* nos muestra un reflejo de tales controversias.

El enorme impulso experimentado por la Ciencia en los tres últimos siglos tiene sus raíces, sin duda, en la obra de Isaac Newton y, más en concreto, en las que considero su dos aportaciones fundamentales: una, la sugerencia de que las leyes físicas eran universales, de modo que unas mismas leyes deberían permitir entender tanto el movimiento de los objetos sobre la Tierra como el de los astros en el espacio; y otra, la formulación de esas leyes como ecuaciones diferenciales y el desarrollo del Cálculo.

En el campo de la Mecánica, a la que voy a referirme casi exclusivamente a partir de ahora, las ideas de Newton, magistralmente desarrolladas por sus sucesores, cosecharon éxitos tales que llevaron a Pierre Simon de Laplace a jactarse de que, si le dieran la posición

y velocidad de cada una de las partículas del universo, podría predecir el futuro para el resto de los tiempos. Está claro que se trata de lo que en términos coloquiales llamaríamos "una farolada". Pero, con las ideas de entonces, las dificultades para lograr ese propósito eran exclusivamente de tipo práctico, y no de principio. Transcribo a continuación unas palabras del mismo Laplace que reflejan la posición de los científicos de 1776 respecto a los fenómenos de la Naturaleza.

"El estado presente del sistema de la Naturaleza es evidentemente una consecuencia de lo que era en el momento anterior y, si imaginamos una inteligencia que en un instante dado abarcara todas las relaciones entre los entes de este universo, podría decir las posiciones respectivas, los movimientos y las propiedades generales de todos estos entes en cualquier tiempo del pasado o del futuro.

"La astronomía física, la rama del conocimiento que hace el honor más alto a la mente humana, nos da una idea, aunque imperfecta, de lo que sería tal inteligencia. La simplicidad de la ley del movimiento de los cuerpos celestes y las relaciones entre sus masas y distancias permiten al análisis seguir su movimiento hasta cierto punto; y, para determinar el estado del sistema de estos grandes cuerpos en los siglos pasados o futuros, le basta al matemático que sus posiciones y velocidades le sean conocidas por la observación en cualquier momento del tiempo. El hombre debe esta capacidad al poder del instrumento que emplea y al pequeño número de relaciones que utiliza en sus cálculos. Pero la ignorancia de las diversas causas implicadas en la producción de sucesos, así como su complejidad, junto a la imperfección del análisis, impide que lleguemos a la misma certidumbre sobre la vasta mayoría de los fenómenos. Por ello hay cosas inciertas para nosotros, cosas más o menos probables, y buscamos compensar la imposibilidad de conocerlas determinando su diferente grado de probabilidad. Así es como debemos a la debilidad de la mente humana una de las más delicadas e ingeniosas de las teorías matemáticas, la ciencia del azar y la probabilidad."

En plena euforia determinista, esas ideas extrapoladas al comportamiento humano, entendido como resultado de procesos biológicos consecuencia de reacciones químicas regidas a su vez por interacciones físicas, llevaron a la conclusión filosófica de que no existe el libre albedrío. Y que, cuando decidimos ir de vacaciones a la playa o a la montaña, no hacemos sino obedecer ciegamente a la famosa ley: fuerza igual a masa por aceleración. Como se ve, el asunto no es banal, a pesar de la ligereza con que aquí lo menciono.

La concepción laplaciana del universo, gestada a lo largo del siglo XVIII, perduró todo

el siglo XIX, pero se tambaleó, y quedó finalmente restringida a lo que hoy entendemos es su ámbito de aplicación, a comienzos del siglo XX, cuando nuevas ideas plasmadas en dos corrientes, la Dinámica del Caos y la Mecánica Cuántica, pusieron en entredicho la capacidad predictiva de la Ciencia.

Es interesante observar que esas dos corrientes científicas, aunque prácticamente co-etáneas, se han desarrollado de modo independiente, con total ignorancia de cada una por parte de la otra, hasta hace muy pocos años, cuando ha empezado a hablarse de lo que se denomina Caos Cuántico. La razón de esa falta de permeabilidad entre esas dos teorías físicas tal vez se encuentre en el hecho de que nacieron al estudiar fenómenos en ámbitos muy distintos: la estabilidad del Sistema Solar, de un lado, y los espectros atómicos, de otro. También, las concepciones fundamentales son muy diferentes, aunque en ambas juega un papel importante el hecho de que en toda ciencia (y eso la distingue de las pseudociencias, sumamente populares y rentables económicamente) es inevitable hacer mediciones.

La Dinámica del Caos no supone ninguna ruptura con las ideas newtonianas. Simplemente constata el hecho de que toda medida tiene una precisión finita y que el error en el conocimiento de las magnitudes fundamentales (posición y velocidad de una partícula, por ejemplo) puede amplificarse exponencialmente en el transcurso del tiempo, lo cual invalida cualquier predicción, y los fenómenos, a pesar de estar sometidos a leyes rígidas, pueden aparecer como aleatorios o caóticos. Permítaseme citar aquí las palabras con las que Henri Poincaré describía en 1903 lo que entendemos por comportamiento caótico.

“Una causa muy pequeña que escapa a nuestra atención determina un efecto considerable que no podemos dejar de observar y entonces decimos que el efecto es debido al azar. Si conociésemos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del universo en el momento inicial, podríamos predecir exactamente la situación de ese mismo universo en un momento posterior. Pero, aun cuando se diese el caso de que las leyes de la naturaleza no tuvieran ningún secreto para nosotros, incluso así sólo podríamos conocer la situación inicial *aproximadamente*. Si esto nos permitiese predecir la situación siguiente con la *misma aproximación*, eso es todo lo que necesitamos y diríamos que el fenómeno habríase predicho, que está gobernado por leyes. Pero no siempre es así. Puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales las produzcan grandes en el fenómeno final. Un pequeño error en las primeras producirá un abultado error en las segundas. La predicción se hace imposible y aparece el fenómeno fortuito.”

La Mecánica Cuántica por su parte, en lo que se conoce como su interpretación orto-

doxa o de Copenhague, postula un principio fundamental, el de Incertidumbre de Heisenberg, que imposibilita el conocimiento exacto simultáneo de magnitudes conjugadas (como la posición y la velocidad de una partícula, por ejemplo). Y eso no por limitaciones de los aparatos, sino como algo esencial de la teoría. Además, aunque es determinista en lo que concierne a la evolución de los sistemas físicos, con leyes tan rígidas como las de la Mecánica Clásica, supone que el resultado de una medición es aleatorio y sólo pueden predecirse probabilidades de los diferentes resultados eventuales. Este proceso aleatorio, que recuerda los caprichos de los dioses mitológicos antes mencionados, es altamente insatisfactorio y, aunque la teoría "oficial" lo impone, ha experimentado el rechazo de mentes tan privilegiadas como la de Albert Einstein por entender que la aparente aleatoriedad no es, una vez más, sino el reflejo de nuestro desconocimiento, de unas posibles variables ocultas en este caso.

Y, ahora que he mencionado a Albert Einstein, parece imprescindible hablar de la Teoría de la Relatividad, que, nacida casi a la vez que las dos teorías físicas a que me he referido antes, contribuyó con ellas a determinar la crisis de la Mecánica Clásica. Es innegable el papel que ha tenido y seguirá teniendo la Teoría de la Relatividad en la configuración de la Física Moderna. Pero, a diferencia de las otras dos teorías que estamos discutiendo, no cuestiona la predictibilidad y en ella no tendrían cabida, por tanto, los fenómenos aleatorios. Su novedad está en la revisión del concepto de simultaneidad, que deja de ser algo intuitivo pero irrealizable, para convertirse en algo fundamentado en hechos experimentales. El tiempo es tratado como una variable más, enteramente análoga a la posición, y la formulación se hace más cómodamente con un lenguaje geométrico. Pero en lo demás se identifica con la Mecánica Newtoniana.

No voy a hablar aquí de la Mecánica Cuántica, cuyo papel primordial en el desarrollo de la Física Nuclear, Atómica y Molecular, y del Estado Sólido es de sobra conocido por toda la audiencia. Tampoco mencionaré la Teoría de la Relatividad, cuyo papel principal está en la construcción de una Teoría de Campos que permita entender los fenómenos subnucleares a la par que los gravitatorios, proyecto ambicioso aún por concluir y que presenta, hoy por hoy, serias dificultades. Quiero referirme únicamente a la pariente pobre, la casi olvidada durante los pasados años Dinámica del Caos, la cual hoy, cuando la otrora opulenta Mecánica Cuántica parece haber completado su ciclo de desarrollo y haber alcanzado el límite de su campo de aplicabilidad, se encuentra extraordinariamente activa, alumbrando constantemente nuevas ideas, descubriendo nuevos dominios y contemplando una ingente tarea por realizar.

El cumpleaños de Oscar II

Por lo general, es difícil precisar la fecha de nacimiento de una teoría científica, porque,

si bien suele ser una persona concreta la que enuncia los principios de esa teoría y en un momento determinado, ordinariamente esa persona aprovecha los conocimientos anteriores y plasma en una formulación clara lo que eran ideas vagas, conjeturas e intuiciones de pensadores anteriores y coetáneos. En el caso que nos ocupa, parece fuera de duda que la persona en cuestión fué Henri Poincaré y la ocasión el sexagésimo aniversario del nacimiento del rey Oscar II de Suecia y Noruega.

Un problema que ha preocupado a los astrónomos y matemáticos a lo largo de los siglos es el de la estabilidad del Sistema Solar, es decir, si el Sistema Solar, en un futuro todo lo lejano que se quiera, seguirá presentando el mismo aspecto o si, por el contrario, se producirán cambios drásticos porque alguno de los planetas escape, o se dé la colisión de dos de ellos o de alguno con el Sol. A partir de Newton, es decir, desde hace unos 300 años, se conocen las leyes que rigen el movimiento planetario. En una primera aproximación, los planetas se mueven en órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol. Pero las fuerzas mutuas entre los planetas perturban estas órbitas de modo que su forma experimenta cambios lentos en todo momento. La descripción de esos cambios, llamados *perturbaciones seculares*, es un problema que se aborda mediante la teoría de perturbaciones clásica. Así pues, el problema de la estabilidad consiste en determinar si esas perturbaciones pueden afectar a las excentricidades de las órbitas de modo que, por ejemplo, una de ellas crezca progresivamente y el planeta correspondiente se aleje indefinidamente o su perihelio se acerque tanto al Sol que se produzca la colisión con éste. Cierto es que las observaciones de los últimos milenios parecen excluir esa eventualidad; pero es cosa muy distinta *probar matemáticamente*, a partir de las ecuaciones del movimiento, que eso no puede ocurrir.

Hace al caso aquí destacar la excelente labor de investigación en estos temas desarrollada en la Escuela creada por el miembro de esta Corporación, D. Rafael Cid. A partir de trabajos cruciales, universalmente reconocidos, del Prof. André Deprit, que nos honra con sus frecuentes estancias en la Universidad de Zaragoza, y de su esposa, y en una larga serie de Tesis Doctorales de actuales Catedráticos y Profesores Titulares de esta Universidad, la Escuela del Prof. Cid ha contribuido de manera decisiva no sólo a la solución de los mencionados problemas de Mecánica Celeste, sino también, en recientes trabajos de los profesores Antonio Elipe y Sebastián Ferrer, al esclarecimiento de la Dinámica de Sistemas Caóticos.

Unos 100 años después de la aparición de los *Principia* de Newton, Lagrange presentó su famosa demostración de la estabilidad del Sistema Solar. También Laplace y Poisson, así como muchos otros autores, aportaron nuevas demostraciones del mismo tipo. Uno hubiera esperado que una sola demostración fuera suficiente para zanjar la cuestión. ¿Por qué, entonces, se daban tantas? La razón es que las tales *demostraciones* lo eran si se

toleraba un cierto grado de aproximación. Los efectos de las fuerzas perturbadoras eran tenidos en cuenta sólo hasta la primera o segunda potencia de la razón de las masas planetarias a la del Sol. Eso permite hacer predicciones válidas para unas décadas, o incluso siglos, pero no para muchos millones de años. En realidad, los astrónomos no están interesados en hacer predicciones a tan largo plazo, sino más bien en el cálculo práctico de las posiciones de los planetas, las llamadas efemérides, una cuestión que ya preocupaba a los babilonios. Y la teoría de perturbaciones surgió precisamente de la necesidad de calcular las órbitas cada vez con mayor precisión. Este problema se resuelve hoy en día por un método mucho más fiable que la teoría de perturbaciones, pero que resulta decepcionante para los teóricos: numéricamente, gracias a los modernos ordenadores. Así es como se calculan las efemérides del Almanaque Náutico. Pero durante el siglo pasado, que vio el extraordinario desarrollo del Análisis, ese problema estaba candente.

A finales del siglo XIX eran bastante comunes los concursos, galardonados con un premio, para resolver problemas matemáticos específicos. Generalmente eran convocados por las Academias Nacionales, sobre todo las de París y Berlín, y las cuestiones propuestas en cada competición reflejaban el interés de la correspondiente academia. Los premios, aunque solían estar dotados con una cantidad nada despreciable, reportaban a los ganadores prestigio científico, sobre todo. Pero, entre las muchas competiciones que tuvieron lugar, hubo una nada común, tanto por las circunstancias que la rodearon como por la trascendencia de sus resultados.

El rey Oscar II había asistido de joven en la Universidad de Uppsala a los cursos de Matemáticas y conservó toda su vida la afición por esa ciencia. De hecho, era bien conocido en los círculos matemáticos. Y, para celebrar su sexagésimo aniversario, tuvo la ocurrencia de convocar una competición matemática. A fin de que ésta tuviera el carácter más internacional posible, encomendó la convocatoria no a la Academia sueca, sino a *Acta Mathematica*, una revista a cuya fundación en 1882 había contribuido con apoyo económico. Así, el encargo de organizar la competición recayó en Gösta Mittag-Leffler, fundador y Editor Jefe de *Acta Mathematica*. Tras algunas dificultades, debidas a la humanamente comprensible rivalidad de los matemáticos más sobresalientes, la comisión que había de proponer los temas y juzgar los trabajos presentados quedó constituida por Hermite, Weierstraß y el propio Mittag-Leffler, que había sido discípulo de los otros dos en París y Berlín respectivamente. En cuanto a las cuestiones objeto de la competición, fueron propuestas cuatro: tres por Weierstraß y una por Hermite. La primera de las cuestiones, la que es importante para lo que aquí nos interesa, estaba planteada en estos términos:

“Es sollen für ein beliebiges System materieller Punkte, die einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, unter der Annahme, daß niemals ein

Zusammentreffen zweier Punkte statt-finde, die Coordinaten jedes einzelnen Punktes in unendliche aus bekannten Funktionen der Zeit zusammengesetzte und für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichmäßig konvergierende Reihen entwickelt werden.”

Es decir, en traducción libre,

“Para un sistema arbitrario de puntos materiales que se atraen entre sí de acuerdo con las leyes de Newton, suponiendo que no se produce ninguna colisión de dos de ellos, se pide desarrollar las coordenadas de los puntos individuales en series infinitas, cuyos términos sean funciones conocidas del tiempo, uniformemente convergentes en un intervalo de tiempo ilimitado.”

¿Por qué planteó Weierstraß esa cuestión? Pues simplemente a causa del enorme interés que había en la época por el problema de n cuerpos. Dirichlet, sucesor de Gauss en Göttingen, comentó en una ocasión, en 1858, a su discípulo Kronecker que había descubierto un método general, totalmente nuevo, para tratar y resolver problemas de Mecánica. Lamentablemente, Dirichlet falleció al año siguiente, sin dejar nada escrito sobre ese asunto. Pero, dado el absoluto rigor de los métodos y demostraciones de Dirichlet, el mundo matemático, informado por Kronecker, no tenía dudas acerca de lo fundado que debía ser el mencionado comentario. Así que Weierstraß, muy interesado también en el problema de n cuerpos, aprovechó la ocasión de la competición para plantear un problema que, según los indicios, había resuelto Dirichlet, pero sin dejar ninguna pista que permitiera reconstruir la solución.

La competición fué convocada oficialmente a mediados de 1885. Los concursantes, que habrían de usar un seudónimo para preservar el anonimato, debían hacer llegar sus trabajos a la redacción de *Acta Mathematica* antes del 1 de Junio de 1888. El premio consistía en una medalla de oro y una suma de 2.500 coronas. (Para que sirva de referencia: el salario de Mittag-Leffler como profesor en Stockholm era de 7.000 coronas anuales.) Además, la memoria galardonada sería publicada en *Acta Mathematica*.

El día 20 de Enero de 1889, víspera del cumpleaños del rey, se hizo público el informe oficial sobre el resultado de la competición. La memoria que resultó vencedora, de las 12 presentadas, era debida a Poincaré. Abordaba la cuestión mencionada antes, pero, en lugar de tratar el problema de n cuerpos, se limitaba a una forma particular del problema de tres cuerpos (lo que se conoce hoy día como problema de tres cuerpos restringido), que corresponde a considerar una de las masas muy grande, la segunda pequeña pero finita, y la tercera infinitamente pequeña, y que las dos primeras masas describen circunferencias en torno a su centro de gravedad común y la tercera se mueve en el plano de esas circunferencias.

La Memoria de Poincaré introducía un tratamiento de los problemas de la dinámica totalmente nuevo, mucho más poderoso que los anteriores. Utilizando métodos geométricos y cualitativos, como secciones transversales y conservación de áreas en el caso de existencia de integrales invariantes, y considerando las soluciones periódicas del sistema, llegó a descubrir las soluciones asintóticas. El jurado, que encontró serias dificultades para entender el trabajo de Poincaré precisamente por lo novedoso de las ideas contenidas, reconoció inmediatamente la labor de un genio y no tuvo dudas a la hora de conceder el premio.

Los genios son humanos

El principal de los hallazgos de Poincaré estaba, sin embargo, por llegar. Estando la Memoria en fase de edición para su publicación en *Acta Mathematica*, Edvard Phragmén, encargado de la edición, encontró algunos puntos no muy claros y así lo comunicó a Mittag-Leffler, que a su vez escribió a Poincaré para que añadiera explicaciones que permitieran entender el texto. Poincaré, que sin duda había escrito su Memoria con cierta prisa para poder tomar parte en la competición, encontró, al revisarla para aclarar los puntos señalados por Phragmén, un error trascendental en otra parte de la Memoria. Y así lo comunicó a Mittag-Leffler:

“ Mon cher ami,

J'ai écrit ce matin à M. Phragmén pour lui parler d'une erreur que j'avais commise et il vous a sans doute communiqué ma lettre. Mais les conséquences de cette erreur sont plus graves que je ne l'avais cru d'abord. Il n'est pas vrai que les surfaces asymptotiques soient fermées, au moins dans le sens où je l'entendais d'abord. Ce qui est vrai, c'est que si je considère les deux parties de cette surface (que je croyais hier encore raccordées l'une à l'autre) se coupent suivant une infinité de courbes trajectoires asymptotiques, et de plus que leur distance est un infiniment petit d'ordre plus élevé que μ^p quelque grand que soit p .

J'avais cru que toutes ces courbes asymptotiques, après s'être éloignées d'une courbe fermée représentant une solution périodique, se rapprochaient ensuite asymptotiquement de la même courbe fermée. Ce qui est vrai, c'est qu'il y en a une infinité qui jouissent de cette propriété.

Je ne vous dissimulerai pas le chagrin que me cause cette découverte. Je ne sais d'abord si vous jugerez encore que les résultats qui subsistent, à savoir l'existence des solutions périodiques, celle des solutions asymptotiques, la théorie des exposants caractéristiques, la non-existence des intégrales uni-

formes et la divergence des séries de M. Lindstedt méritent encore la haute récompense que vous avez bien voulu leur accorder.

D'autre part, de grands remaniements vont devenir nécessaires et je ne sais si on n'a pas commencé à tirer la mémoire; j'ai télégraphié à M. Phragmén.

En tout cas je ne puis mieux faire que de confier mes perplexités à un ami aussi dévoué que vous l'avez toujours été.

Je vous en écrirai plus long quand j'aurai vu un peu plus clair dans mes affaires.

Veillez agréer, mon cher ami, avec mes bien sincères excuses, l'assurance de mon entier dévouement,

Poincaré ”

Acababa de descubrir lo complicada que podía llegar a ser la que conocemos hoy como Dinámica del Caos, cuyas bases sentó Poincaré precisamente en la versión corregida de su Memoria.

Esa franqueza de Poincaré, informando de un error del cual sólo él era sabedor, le costó unos meses de trabajo durísimo para rehacer una buena parte de su Memoria sin ocasionar demasiado retraso en la publicación de Acta Mathematica. Y para colmo, le fué requerido por Mittag-Leffler el pago, al que accedió de buen grado, de 3.500 coronas (1.000 más que la dotación del premio) para cubrir los gastos de la impresión de algunos ejemplares de la versión original, que habían sido ya distribuídos y que Mittag-Leffler trató de recuperar de modo discreto, sin levantar sospechas acerca del error, para evitar lo que él creía podría ser un escándalo que afectaría a su reputación, como miembro del jurado.

Sistemas Dinámicos

Ya he mencionado antes que la Memoria de Poincaré representaba un enfoque totalmente nuevo del problema de tres cuerpos. En lugar de ocuparse del cálculo de órbitas individuales, se propuso estudiar las propiedades cualitativas de órbitas vecinas, es decir, correspondientes a condiciones iniciales próximas. Y para ello comenzó por el análisis de la estabilidad de las posibles órbitas periódicas. Supo aprovechar la existencia de integrales invariantes, asociadas a leyes de conservación, para reducir el número de grados de libertad y facilitar así la resolución del problema. Y, algo sumamente original que tardó en ser digerido por los matemáticos coetáneos, basó su análisis cualitativo de la estabilidad en el estudio de las secciones transversales de las órbitas, lo que se conoce con el nombre de "mapping" de Poincaré. Estas ideas constituyen el fundamento de una ciencia que se ha desarrollado a lo largo de este siglo y que ha alcanzado una actividad febril en las últimas décadas: la ciencia de los Sistemas Dinámicos. Es precisamente en

el estudio de los sistemas dinámicos en donde aparecen las manifestaciones más claras y sencillas de comportamiento caótico, junto con objetos geométricos muy peculiares, como conjuntos de Cantor, fractales, etc., que tanto interés han despertado hasta en el mundo artístico.

Aunque la denominación de sistemas dinámicos parece sugerir que se trata de puntos materiales regidos por las leyes de la Dinámica (las de Newton en concreto), se aplica también, por extensión, a estructuras descritas mediante n variables x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dependientes de otra t , en la mayoría de los casos el tiempo, que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

donde las F_i representan funciones reales de las variables. Este tipo de estructuras matemáticas se presenta no sólo en Mecánica y Astronomía, sino también, con diferentes significados para las variables x_i , en el estudio de reacciones químicas, convección de fluidos, aceleradores de partículas, confinamiento de plasmas, óptica no lineal, cadenas de spines o de moléculas, poblaciones de seres vivos en competición, etc. etc.. Los posibles estados del sistema, para un cierto valor de t , vienen caracterizados por los valores de las variables x_i y pueden asociarse con un punto x en un espacio n -dimensional llamado *espacio de fases*. La evolución del estado del sistema al variar t hace que pase a ser descrito sucesivamente por diferentes puntos x que constituyen la trayectoria en el espacio de fases o *curva de fases*. Un dibujo que represente varias curvas de fases, correspondientes a distintas condiciones iniciales del sistema, se denomina *retrato de fases* y puede ser muy útil para hacerse una idea cualitativa del comportamiento del sistema al variar las condiciones iniciales.

Para ilustrar estos conceptos podemos referirnos a un ejemplo elemental conocido por todos: el péndulo. En su versión idealizada está constituido por una masa puntual m unida a un punto fijo mediante una varilla rígida, sin masa, de longitud l . Para mayor sencillez, supondremos además que el péndulo está restringido a moverse en un plano vertical, de manera que sólo haya una coordenada o grado de libertad: el ángulo θ que forma la varilla con la vertical. Como es de sobra conocido, las leyes de Newton se traducen en este caso en la relación

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta, \quad (2)$$

que, simplificando, resulta

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (3)$$

Este ejemplo pertenece a un tipo particular de sistemas dinámicos, llamados sistemas Hamiltonianos, que pueden ser descritos con la ayuda de una función, la Hamiltoniana

$H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$, de los grados de libertad q_i y de sus momentos conjugados p_i , tal que el sistema dinámico (de variables $q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N$ dependientes de t) se escribe en la forma

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_i} H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q_i} H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

En el ejemplo del péndulo sería $N = 1$, $q_1 = \theta$, $p_1 = ml^2\omega$, siendo $\omega \equiv d\theta/dt$ la velocidad angular del péndulo, y $H = p_1^2/2ml^2 + mgl(1 - \cos q_1)$. El sistema dinámico, que resulta ser

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad (6)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta, \quad (7)$$

es fácilmente soluble si uno tiene en cuenta que, como en todo sistema Hamiltoniano, hay una integral primera, es decir, una función de las variables que se mantiene constante, precisamente $H(q, p)$. En el ejemplo que estamos considerando, esa integral primera no es otra cosa que la energía total, suma de la cinética y la potencial, que, como es bien sabido, se conserva. Así resulta que si inicialmente, en el instante $t = 0$, los valores de θ y ω son respectivamente θ_0 y ω_0 y, por tanto, el valor de la energía $E = \frac{1}{2}ml^2\omega_0^2 + mgl(1 - \cos \theta_0)$, el movimiento del péndulo puede representarse en el espacio de fases (θ, ω) por una línea de ecuación

$$\frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E \quad (8)$$

En la Figura 1 tenemos un retrato de fases que contiene varias curvas de fases correspondientes a diferentes valores de E . En realidad sólo se ha representado la región del espacio de fases correspondiente a $-2\pi < \theta < 2\pi$, ya que a derecha e izquierda se repite el mismo dibujo con periodicidad 2π . Una descripción alternativa sería considerar un espacio de fases sobre una superficie cilíndrica, para tener en cuenta el hecho de que las abscisas θ y $\theta + 2n\pi$ (n entero) corresponden a un mismo punto geométrico. El retrato de fases entonces sería el que resulta enrollando la Figura 1 en forma de superficie cilíndrica y de modo que las líneas $\theta = -\pi$ y $\theta = \pi$ vengan a coincidir. Se puede definir entonces para cada curva de fases el llamado *número de rotación*, o número de vueltas por unidad de tiempo que el punto representativo del estado del sistema da alrededor del eje del cilindro. Pueden verse en la Figura 1 curvas de número de rotación nulo, que corresponden a movimientos de *libración* (vaivén) del péndulo, y curvas de número de rotación negativo o positivo, representativas de movimientos de *rotación* del péndulo en torno a su punto de suspensión en el sentido de las agujas del reloj o en el contrario. La curva que encierra

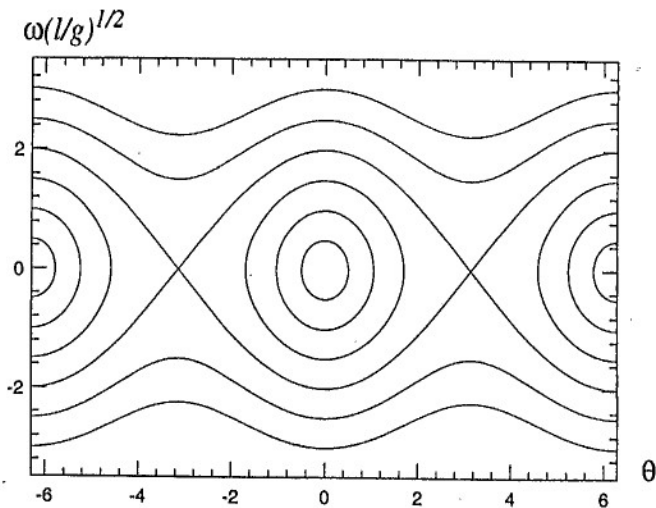


Figura 1.—Curvas de fases del péndulo, correspondientes a diferentes valores de la energía.

a las de número de rotación nulo es la *separatriz*. Corresponde a un movimiento en que el péndulo lleva la velocidad precisa para justamente llegar al punto más alto (en un tiempo infinito) y allí detenerse. Algunas de las curvas de fases se reducen a un solo punto llamado *punto fijo*, lo cual corresponde a que el péndulo permanezca indefinidamente en la misma posición y con la misma velocidad. Tal es el caso de los puntos $(-2\pi, 0)$, $(0, 0)$ y $(2\pi, 0)$ que representan el equilibrio (estable) de la masa del péndulo en la vertical y por debajo del punto de suspensión y de los puntos $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ que corresponden al equilibrio (inestable) de la masa del péndulo en la vertical y por encima del punto de suspensión. Por razones que se adivinan a la vista del dibujo, los puntos de equilibrio estable se denominan *elípticos* y los de inestable *hiperbólicos*.

En el ejemplo que acabamos de ver los movimientos del péndulo son siempre regulares, en el sentido de que se puede predecir la trayectoria en el espacio de fases, es decir, los sucesivos estados del sistema, para un futuro tan lejano como se quiera. Incluso si las condiciones iniciales no son conocidas con absoluta precisión, el error no va a crecer en el transcurso del tiempo: curvas de fases próximas (a un mismo lado de la separatriz) en un cierto instante inicial se mantienen siempre próximas. La situación cambia drásticamente si se supone que el péndulo se mueve en un medio que ejerce un cierto rozamiento proporcional a la velocidad, $Rl d\theta/dt$, y que experimenta además una fuerza periódica, $F \cos(t/\tau)$, de modo que en lugar de la relación (2) tendríamos como ecuación del movimiento

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta - Rl \frac{d\theta}{dt} + F \cos(t/\tau), \quad (9)$$

de manera que el sistema dinámico sería, en lugar de (6) y (7),

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad (10)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{R}{m} \omega + \frac{F}{ml} \cos(t/\tau). \quad (11)$$

Estas dos ecuaciones diferenciales acopladas pueden resolverse numéricamente con cualquiera de los algoritmos convencionales. En la Figura 2 mostramos curvas de fases correspondientes a un rozamiento $R = \frac{1}{2}m\sqrt{g/l}$ y una fuerza periódica de frecuencia $1/\tau = \frac{2}{3}\sqrt{g/l}$ e intensidad $F = fmg$, con diferentes valores de f . En el gráfico (a), correspondiente a $f = 0.9$, se puede observar el ciclo límite a que tiende el péndulo tras unos pocos ciclos de la fuerza externa. El período de ese movimiento de vaivén resulta coincidente con el de dicha fuerza. En (b), para $f = 1.07$, se ve que el ciclo límite está formado por dos vaivenes de amplitudes ligeramente diferentes. El período ahora es el doble. Este proceso de duplicación del período continúa a medida que crece f hasta llegar a una situación en que el movimiento del péndulo deja de ser periódico y se convierte en caótico, como se observa en (c), donde se ha dibujado la curva de fases, para $f = 1.15$, durante 50 ciclos de la fuerza periódica. Si se continuase durante más tiempo, la figura resultaría más y más emborronada, sin alcanzarse nunca un ciclo límite. Creciendo f puede recuperarse un movimiento periódico, como el que se ve en (d), obtenido para $f = 1.35$ y constituido por un vaivén y una rotación completa, con un período igual al de la fuerza externa. En (e), para $f = 1.45$, puede observarse cómo se ha duplicado el período, resultando un ciclo compuesto de dos vaivenes de amplitudes diferentes seguido cada uno de ellos de una vuelta completa. Por último, podemos ver en (f) que, para $f = 1.47$, se tiene de nuevo un comportamiento caótico.

Secciones de Poincaré

Es evidente que los retratos de fases que, tras un tiempo infinito, aparecerían en los gráficos (c) y (f) de la Figura 2 no nos darían ninguna idea acerca de cuál ha sido la secuencia de los sucesivos estados por los que ha pasado el sistema en el transcurso del tiempo. Para tener una descripción de la evolución sería necesario representar el instante a que corresponde cada par de valores de las variables ángulo y velocidad angular. Pero ello requeriría añadir a nuestros gráficos una tercera dimensión para representar el tiempo, lo cual complica extraordinariamente el dibujo.

Una situación aún más complicada se encuentra cuando se estudia un sistema dinámico con dos grados de libertad, incluso en el caso de que el sistema sea Hamiltoniano. Si designamos por x e y las coordenadas o grados de libertad y por p_x y p_y los momentos conjugados, el espacio de fases es cuadrimensional. Siendo Hamiltoniano el sistema, se

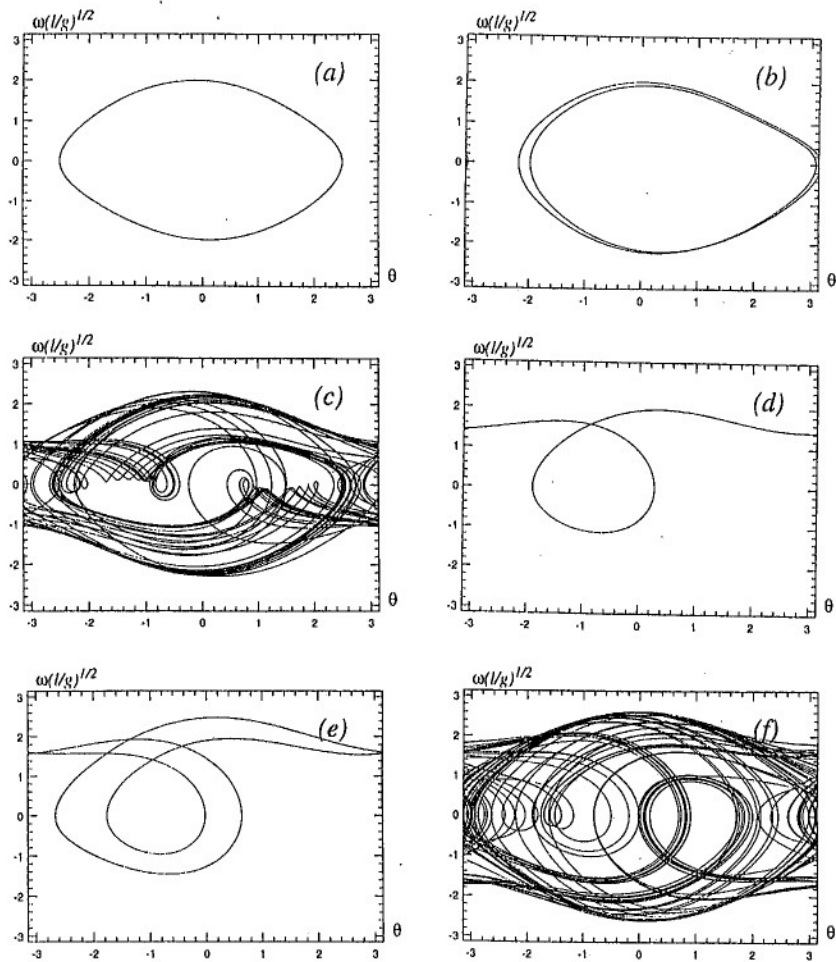


Figura 2.—Retrato de fases del péndulo amortiguado y forzado, para diferentes intensidades de la fuerza periódica. En los gráficos (c) y (f) sólo se ha representado el movimiento del péndulo durante los primeros 50 ciclos de la fuerza periódica. Si se continuase, las curvas irían cubriendo más y más una banda del espacio de fases donde están localizadas.

tiene una integral primera, o sea, una restricción sobre las variables x, y, p_x, p_y , a saber

$$H(x, y, p_x, p_y) = E, \quad (12)$$

siendo E la energía, o su equivalente si el sistema no es mecánico. Eso significa que las curvas de fases están restringidas a un espacio tridimensional llamado *superficie de energía*. Ese espacio no se parece en nada al espacio tridimensional ordinario, ya que es no-Euclídeo, cerrado y en ocasiones múltiplemente conexo. Todas las esperanzas de poder hacer una representación gráfica parecen esfumarse, por tanto.

Sin embargo, Poincaré ideó una técnica que permite salvar estas dificultades. Introdujo la idea de una superficie sin contacto con la de energía, o sea, no tangente a las curvas de fases, y consideró las sucesivas intersecciones de éstas con dicha superficie. En el sistema dinámico con dos grados de libertad que estamos considerando, podría tomarse como superficie transversa la $y = 0$, por ejemplo. Una curva de fases queda totalmente determinada por su intersección (x, p_x) con esa superficie transversa, ya que sobre ella es $y = 0$ y el valor de p_y queda entonces determinado por la restricción (12). Las sucesivas intersecciones (para distintos valores del tiempo) de la curva de fases con la superficie transversa dan un conjunto de puntos que se conoce como *sección transversa* o *sección de Poincaré* de la curva de fases y la aplicación que lleva, en esa superficie transversa, de un punto de intersección al siguiente en el tiempo es el *mapping de Poincaré*. Lo ventajoso de esta técnica es que del examen del gráfico bidimensional que resulta se pueden deducir propiedades interesantísimas de la curva de fases y, por tanto, del comportamiento del sistema dinámico, como por ejemplo periodicidad, acotación, ergodicidad, etc., cuyo conocimiento puede ser suficiente para lo que se persigue.

Volvamos ahora al ejemplo del péndulo con amortiguamiento y forzado. En lugar de intentar representar su comportamiento mediante una curva en el espacio tridimensional (tiempo, ángulo, velocidad angular), podemos inspirarnos en la técnica de Poincaré y representar en un plano las intersecciones de dicha curva con diferentes planos correspondientes a valores determinados del tiempo. Por ejemplo, podríamos considerar esas intersecciones con la misma periodicidad que la fuerza externa, es decir, representar en un plano los valores de θ y ω para cada instante $t = t_n = t_0 + n2\pi\tau$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). De ese modo tendríamos una imagen estroboscópica de la evolución. En la Figura 3 se muestran los gráficos resultantes para los mismos valores de los parámetros que en el caso de la Figura 2. En (a) se observa un solo punto (en realidad un disco, para que pueda ser visto) como corresponde a un movimiento periódico acompasado con la fuerza externa, los dos puntos de (b) muestran que el movimiento es periódico, pero que su período es el doble que el de la fuerza. El gráfico (c) muestra que el comportamiento es caótico, pero las secciones de la curva de fases a intervalos de tiempo coincidentes con el período de la

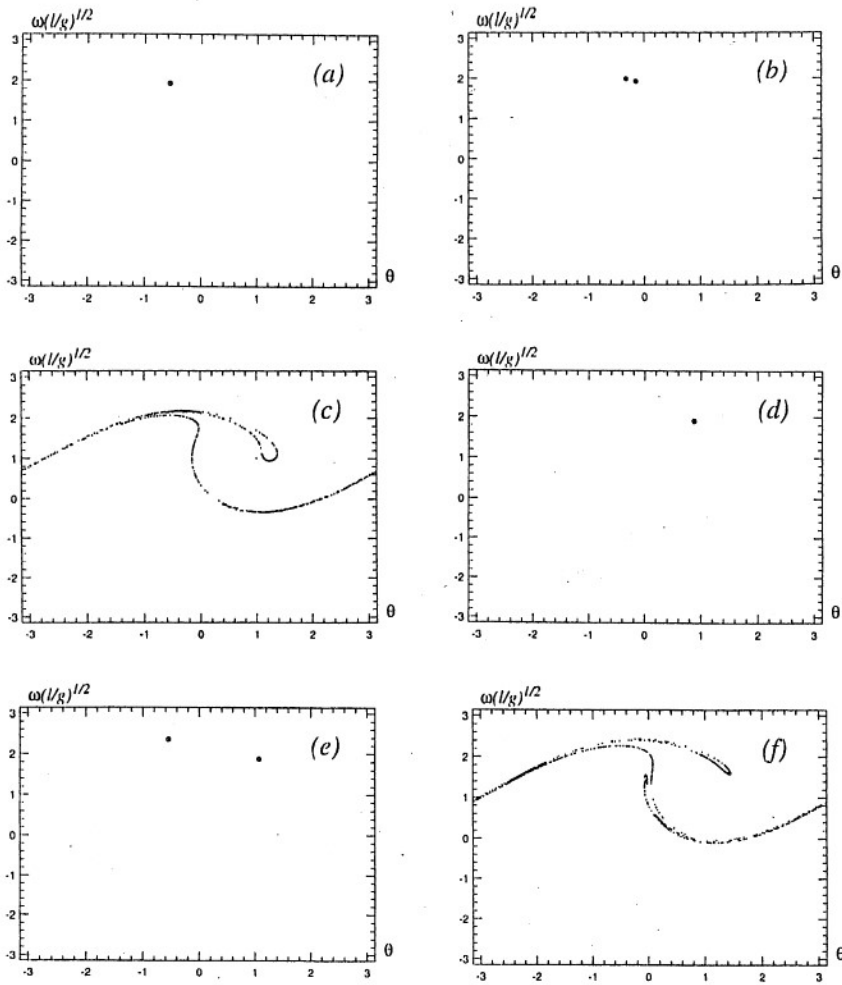


Figura 3.—Secciones de Poincaré de los retratos de fase del péndulo amortiguado y forzado representados en la Figura 2.

fuerza se disponen sobre una figura que se asemeja a una curva con infinitos plegamientos. (El punto de coordenadas (1, 1) corresponde al estado inicial). Los gráficos (d), (e) y (f) vuelven a ilustrar lo ya observado en (a), (b) y (c).

Mappings

El comportamiento caótico que Poincaré descubrió en el estudio de los sistemas dinámicos continuos aparece también en sistemas más sencillos, discretos, regidos por ecuaciones en diferencias en lugar de diferenciales, y a los que, rogando el perdón de la audiencia, me referiré con el barbarismo de *mappings*. Y a propósito de este término se me ocurre que quizá algún día en España la Ciencia llegue a ser tan popular como el fútbol; y entonces *mapping*, tal vez maquillado para quedarse en *mapin* o algo así, dejará de ser barbarismo.

En las décadas de 1950 y 1960 varios ecólogos estudiaron ecuaciones en diferencias de primer orden como modelos, deliberadamente simplificados, de los efectos de la regulación dependiente de la densidad en poblaciones de una única especie. En particular, MORAN [8] en un contexto entomológico y RICKER [14] en relación con las pesquerías estudiaron la ecuación

$$N_{t+1} = R_0 N_t \exp(-aN_t). \quad (13)$$

Aquí N_t representa el número de individuos de la especie en estudio en un determinado momento y N_{t+1} dicho número al año o en la generación siguiente. Los parámetros R_0 y a dependen de la especie de que se trata y de las condiciones (abundancia de alimentos, etc.) en que se encuentra. El valor de N_{t+1} es proporcional al de N_t y por tanto crecería al crecer éste, si no fuera por la presencia del otro factor, $\exp(-aN_t)$, que disminuye al aumentar N_t y da cuenta de las crecientes dificultades que encuentra una población que aumenta.

Los citados ecólogos, de acuerdo con las ideas de la época, buscaban puntos fijos en la ecuación (13), es decir; poblaciones estables, o bien soluciones periódicas, correspondientes a valores diferentes de la población que se repetían cíclicamente. Ajustando los parámetros R_0 y a encontraban ese tipo de soluciones. Pero, en sus estudios numéricos, también encontraron indicios de cierto comportamiento irregular. Moran incluso propuso a un doctorando estudiar ese comportamiento inesperado, pero el doctorando no llegó a completar su Tesis y el asunto quedó olvidado. Hasta que, a mediados de los 70, LI y YORKE [5] e independientemente MAY y OSTER [7] pusieron de manifiesto el complicado comportamiento de las soluciones de ecuaciones en diferencias de primer orden con derivada de Schwartz negativa y sus implicaciones en modelos ecológicos.

El ejemplo más sencillo de modelo de este tipo es el conocidísimo *mapping logístico* o *cuadrático*,

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad (14)$$

que puede asociarse con la población de peces en un estanque en años sucesivos. La escala para la población x es tal que sólo puede variar entre 0 y 1. Se pueden hacer experimentos numéricos muy sencillos con la ecuación (14), comparando las soluciones que se obtienen al tomar diferentes valores para la población inicial x_0 y considerando distintos valores del parámetro a , que representa los efectos promedio de los factores ambientales. Para evitar llegar a soluciones absurdas, como una población negativa o infinita, a debe restringirse al intervalo $0 < a < 4$. Para valores $a \leq 1$, la población tiende a extinguirse cualquiera que sea el valor inicial x_0 . Si se tiene $1 < a < 3$, la población, para todo x_0 diferente de 0 ó 1, tiende al valor $1 - (1/a)$, que corresponde a un punto fijo estable de la ecuación (14). Para $a = 3$ ocurre lo que se llama una bifurcación de ese punto fijo: con $3 < a < 3.45$ y cualquiera que sea la población inicial, exceptuados los valores 0 y 1, las sucesivas poblaciones x_n tienden al crecer n a estabilizarse en un ciclo de dos valores, saltando del uno al otro en cada año. Una nueva bifurcación ocurre para $a = 3.45$, de modo que pasa a tenerse, como límite al que tiende la población, un ciclo de cuatro valores. Y así, a medida que crece a y cada vez para menores incrementos de este parámetro, se encuentran nuevas bifurcaciones hasta llegar a una situación, con $3.57 < a < 4$, en que los sucesivos valores de x_n parecen a primera vista totalmente aleatorios. Y digo a primera vista porque el comportamiento del sistema no es en absoluto aleatorio, sino caótico. Veamos cuál es la diferencia entre esos dos calificativos.

Si a uno le dan los sucesivos valores x_n , que parecen no tener orden ni concierto, puede llegar a descubrir la relación (14) por el procedimiento de representar gráficamente x_{n+1} en función de x_n para todo n , es decir, dibujar en un plano los puntos (x_n, x_{n+1}) . No sería difícil darse cuenta de que el gráfico corresponde a la función $f(x) = ax(1-x)$. Eso prueba que el comportamiento del sistema no es aleatorio, sino plenamente determinista. Y, una vez que se ha visto que la ley es (14), puede predecirse el valor de x_{n+1} a partir del de x_n . Lo que da el carácter caótico al comportamiento del sistema es su extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. De tal manera que, aún conociendo la relación (14), podemos hacer predicciones fiables acerca de los primeros valores sucesivos de la población, pero no a largo término, ya que para eso necesitaríamos conocer el valor de partida con infinitas cifras y mantener esas infinitas cifras a lo largo de todos los cálculos.

La sensibilidad a las condiciones iniciales que caracteriza al caos determinista puede expresarse de modo cuantitativo mediante los llamados *exponentes de Lyapunov*. Para un mapping del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (15)$$

como es el logístico, hay un solo exponente de Lyapunov, λ , que se define como el valor promedio del logaritmo neperiano del módulo de la derivada de la función $f(x)$ que ca-

racteriza al mapping calculada para los sucesivos valores x_n ,

$$\lambda \equiv \langle \ln |df/dx|_n \rangle. \quad (16)$$

La razón de esta definición está en que si consideramos la evolución de dos poblaciones cuyos valores iniciales x_0 y $x_0 + \varepsilon$ difieren en una pequeña cantidad, $\varepsilon \ll 1$, la diferencia de las poblaciones en la primera iteración será

$$f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = \varepsilon(df/dx)_{x_0} + O(\varepsilon^2) \quad (17)$$

y, con la cruda aproximación de reemplazar df/dx por su valor promedio, $\exp(\lambda)$, resulta que al cabo de N iteraciones la diferencia entre los valores de una y otra población puede ser $\varepsilon \exp(\lambda N)$: En los casos en que el exponente de Lyapunov resulte ser positivo, nos encontramos con que, aún con un pequeñísimo error ε en el valor inicial de la población, o en cualquiera de los cálculos posteriores, no podemos hacer predicciones a largo plazo, puesto que el error aumenta exponencialmente. El número $N_\lambda \equiv 1/\lambda$ se llama *horizonte de Lyapunov* y limita el alcance de las predicciones razonablemente fiables que pueden hacerse para un sistema sensible a las condiciones iniciales.

Como ilustración pueden considerarse las dos secuencias generadas por el mapping

$$x_{n+1} = \alpha x_n (1 - x_n^2), \quad (18)$$

con $\alpha = 2.5$ y dos valores iniciales distintos pero muy próximos, $x_0^{(1)} = 0.700000000$ y $x_0^{(2)} = 0.700000001$. Los valores que resultan para $x_n^{(i)}$ ($i = 1, 2$) están representados en la Figura 4. Como puede observarse, no hay diferencia apreciable a simple vista entre los valores de una y otra secuencia hasta $n \simeq 30$. Pero para $n \geq 40$ ya se advierte una clara diferencia entre unos y otros valores, a pesar de que los iniciales podían considerarse coincidentes con un error relativo de sólo 10^{-8} , una precisión que rara vez se consigue en las medidas experimentales. Si quisiéramos tener concordancia a simple vista hasta $n = 40$ necesitaríamos coincidencia en los valores iniciales con un error relativo de 10^{-12} . A esta dependencia de las condiciones iniciales tan acusada se la suele designar con el nombre de *efecto mariposa*: una mariposa volando lentamente ocasiona una alteración sumamente pequeña del flujo de aire en la atmósfera, despreciable diríamos, pero suficiente para impedirnos predecir el tiempo que hará dentro de una semana.

Los mappings unidimensionales, como el logístico, ponen ya de manifiesto el posible comportamiento caótico de un sistema. Pero no muestran, sin embargo, toda la riqueza de fenómenos que pueden observarse en ese comportamiento cuando se consideran mappings de dimensión mayor, es decir, con más variables. Por ese motivo han sido muy estudiados los mappings bidimensionales, que siguen siendo sencillos de tratar, en lo que concierne

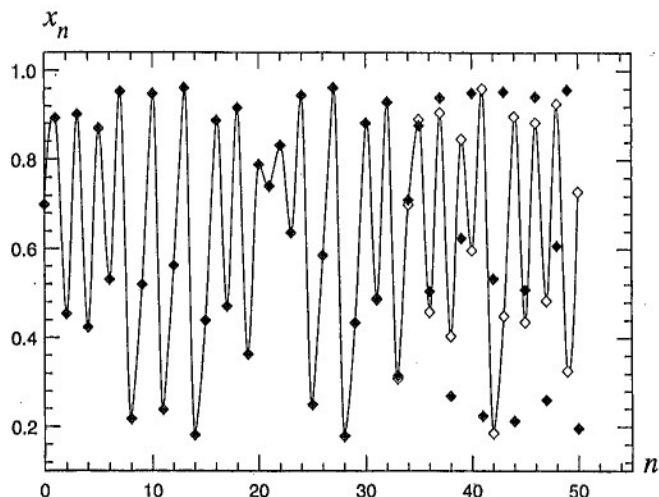


Figura 4.—Sensibilidad a las condiciones iniciales. Se muestran dos secuencias generadas por un mismo mapping, el dado por la ecuación (18), para dos valores iniciales ligeramente diferentes. Los rombos llenos, que se han unido con una línea quebrada para guiar al ojo, corresponden a valores de x_n obtenidos empezando con $x_0 = 0.700000000$ y los rombos vacíos con $x_0 = 0.700000001$.

a experimentos numéricos y representaciones gráficas, pero presentan ya aspectos que son generales en mappings de dimensión superior. Voy a referirme solamente a dos de esos mappings bidimensionales que son los más analizados y a cuyo estudio he aportado modestas contribuciones [10], [11], [12]: el mapping standard o de CHIRIKOV-TAYLOR [2] y el mapping de Hénon.

Mapping Standard

Es el resultado de efectuar la sección de Poincaré, tal como se ha descrito antes, para un sistema Hamiltoniano que puede representar diversas situaciones físicas, como por ejemplo el movimiento de una partícula cargada en una botella magnética (el tipo de dispositivo con que se pretende confinar el plasma para lograr la fusión nuclear), o también el movimiento de un rotor rígido que recibe periódicamente impulsos instantáneos regulares. Pero el mayor interés del mapping standard está en que describe el comportamiento en la vecindad de la separatriz para la gran generalidad de los sistemas no lineales, y de ahí el nombre de *standard* con que se lo designa.

El mapping en cuestión es una aplicación del plano en sí mismo dada por

$$x_{n+1} = x_n + y_n + \lambda \sin x_n \pmod{2\pi}, \quad (19)$$

$$y_{n+1} = y_n + \lambda \sin x_n. \quad (20)$$

Aquí x_n e y_n son las variables ángulo y acción que describen el estado del sistema en el instante n y λ es un parámetro que mide la intensidad de la perturbación no lineal. La periodicidad (mod 2π) en la variable x , consecuencia de su significado de ángulo, hace que podamos considerar el mapping como teniendo lugar no en todo el plano, sino en una banda vertical infinita de anchura 2π o, equivalentemente, sobre la superficie cilíndrica que resulta enrollando esa banda en torno a un eje vertical. Esa periodicidad en la variable x hace que se tenga al mismo tiempo una simetría de traslación 2π en la variable y , como resulta evidente de las ecuaciones (19) y (20).

En ausencia de perturbación no lineal, $\lambda = 0$, todos los movimientos son regulares. Si las condiciones iniciales son tales que $y_0/2\pi$ es un número racional p/q (siendo p y q primos entre sí), la *historia* (trayectoria en el espacio ángulo-acción) del sistema es periódica: un conjunto de q puntos que se van ocupando uno tras otro repetidamente para sucesivos valores de n . Se dice entonces que se tiene una resonancia de período q . Si $y_0/2\pi$ es irracional, la historia, que suele llamarse cuasiperiódica, es un conjunto infinito de puntos que van siendo ocupados una sola vez, sin que haya posibilidad de que se repita un estado del sistema, y que llenan densamente una línea horizontal. En el caso de dimensionalidad mayor, en lugar de esa línea se tiene un toro, por lo que es preferible verla como un toro degenerado y, de hecho, a las líneas resultantes para diferentes valores irracionales de $y_0/2\pi$ se las llama (por razones que luego se verán) KAM-toros.

Imaginando que el mapping tiene lugar sobre una superficie cilíndrica, tal como hemos indicado antes, puede definirse para cada una de las historias su número de rotación ω como el límite, cuando n tiende a infinito, del cociente entre el número de vueltas que el punto representativo del sistema ha dado alrededor del cilindro al cabo de n iteraciones y dicho valor de n . (Es evidente que, para el caso que estamos considerando de $\lambda = 0$, se tiene $\omega = y_0/2\pi$.) Así pues, las historias periódicas o resonancias tienen número de rotación racional y las cuasiperiódicas o KAM-toros irracional.

Si ahora se introduce una perturbación no lineal de pequeña intensidad, $\lambda \ll 1$, los puntos que constituyen las historias periódicas cambian ligeramente de posición, los KAM-toros se deforman, subiendo en unas regiones y bajando en otras respecto a la línea horizontal que eran originalmente, y muchos de ellos desaparecen, surgiendo en su lugar una especie de bandas casi horizontales que son llenadas de un modo estocástico por historias correspondientes a los números de rotación irracionales cuyos toros han desaparecido, y que representan un comportamiento caótico del sistema. Hay un teorema famoso probado, con generalidad creciente y a lo largo de varios años, por Kolmogorov, Arnold y Moser (KAM) que asegura, al menos para perturbaciones suficientemente pequeñas, la persisten-

cia de historias cuasiperiódicas, o sea, de KAM-toros. Sin embargo, a medida que crece la intensidad λ de la perturbación no lineal, más y más KAM-toros son destruidos, hasta que para un valor crítico, λ_c , desaparece el último de ellos. Al mismo tiempo, las bandas estocásticas, que estaban limitadas por KAM-toros, se van uniendo al desaparecer éstos, amplían así su anchura, y terminan, para $\lambda > \lambda_c$, cubriendo todo el espacio ángulo-acción a excepción de los puntos asociados a las resonancias y unas pequeñas regiones en torno a cada uno de ellos llamadas *islas de estabilidad*.

Es muy interesante además observar cuándo y cómo desaparecen los diversos KAM-toros a medida que crece el parámetro de no linealidad λ . La persistencia de los toros está estrechamente relacionada con el carácter irracional de su número de rotación asociado ω . Cuanto más difícil resulta aproximar ω por números racionales, es decir, cuanto más lentamente converge la fracción continua infinita representativa de ω (limitándonos a la región $0 \leq y < 2\pi$)

$$\omega = [a_1, a_2, a_3, \dots] \equiv \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \quad (21)$$

con a_1, a_2, a_3, \dots enteros positivos, tanto mayor es el valor de λ para el cual el toro correspondiente desaparece. Así, el toro más persistente, el que desaparece cuando λ alcanza el valor crítico λ_c , tiene como número de rotación el áureo

$$\omega_c = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = [1, 1, 1, 1, \dots]. \quad (22)$$

Los inmediatamente anteriores en desaparecer, para valores de λ ligeramente inferiores a λ_c , son los de número de rotación noble,

$$\omega = [n, 1, 1, 1, \dots]. \quad (23)$$

En cambio, aquellos KAM-toros para los que la secuencia a_1, a_2, a_3, \dots crece (y, por tanto, la fracción continua $[a_1, a_2, a_3, \dots]$ converge rápidamente) son los primeros en desaparecer, para valores muy bajos de λ . Y en lo que concierne a cómo desaparecen los toros, se conjetura que, para un cierto valor de λ , se convierten en conjuntos de Cantor, de los que luego hablaré. (Usando una terminología que en mi opinión es algo cursi, se dice en inglés que se convierten de *KAM-tori* en *Cántori*.) Esos conjuntos de Cantor presentan huecos a través de los cuales pueden comunicarse las bandas estocásticas que hay a uno y otro lado y, al crecer λ , el conjunto de Cantor pierde su identidad y sus puntos pasan a formar parte de la banda estocástica resultante de la fusión de las dos que se tenían.

Mapping de Hénon

El mapping standard a que acabo de referirme corresponde a un sistema dinámico Hamiltoniano. La conservación de la integral de energía, que se tiene para todo sistema

Hamiltoniano, induce en el mapping la conservación de las áreas: la región delimitada por una curva cerrada se distorsiona en cada iteración del mapping, pudiendo llegar a adoptar formas inimaginables, pero el área de esa región se preserva. Esa propiedad se pierde cuando se trata de un mapping

$$x_{n+1} = F_1(x_n, y_n), \quad (24)$$

$$y_{n+1} = F_2(x_n, y_n), \quad (25)$$

que ya no corresponde a un sistema Hamiltoniano y cuyo determinante Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (26)$$

es diferente de 1. Se han estudiado multitud de mappings con $J < 1$, como por ejemplo el mapping standard disipativo

$$x_{n+1} = x_n + y_n + \lambda \sin x_n, \quad (27)$$

$$y_{n+1} = ky_n + \lambda \sin x_n, \quad k < 1, \quad (28)$$

que describe el mismo rotor golpeado periódicamente del mapping standard pero sometido ahora a rozamiento de modo que su velocidad angular sufre en cada paso una reducción por un factor k . Para ciertos rangos de valores de los parámetros y cualesquiera que sean las condiciones iniciales, los puntos (x_n, y_n) tienden a acumularse sobre unas figuras llamadas *atractores extraños*. El más famoso de todos los mappings disipativos es el propuesto por HÉNON [4], a saber,

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2, \quad (29)$$

$$y_{n+1} = bx_n. \quad (30)$$

La existencia de atractores extraños se detecta para diferentes rangos de valores de los parámetros a y b . En particular Hénon consideró $a = 1.4$ y $b = 0.3$ en su trabajo original. Cualquiera que sea el par (x_0, y_0) de valores iniciales, los sucesivos iterados (x_n, y_n) se disponen (después de unos pocos primeros transitorios) a lo largo de una especie de línea, sumamente intrincada a causa de sus infinitos pliegues, que constituye el atractor de Hénon. En la Figura 5 se muestra dicho atractor.

Los atractores extraños presentan unas características muy peculiares: son *autosemejantes*, tienen transversalmente la estructura de un *conjunto de Cantor*, y son de dimensión no entera, es decir, *fractales*. Creo que merece la pena comentar brevemente cada uno de estos tres aspectos.

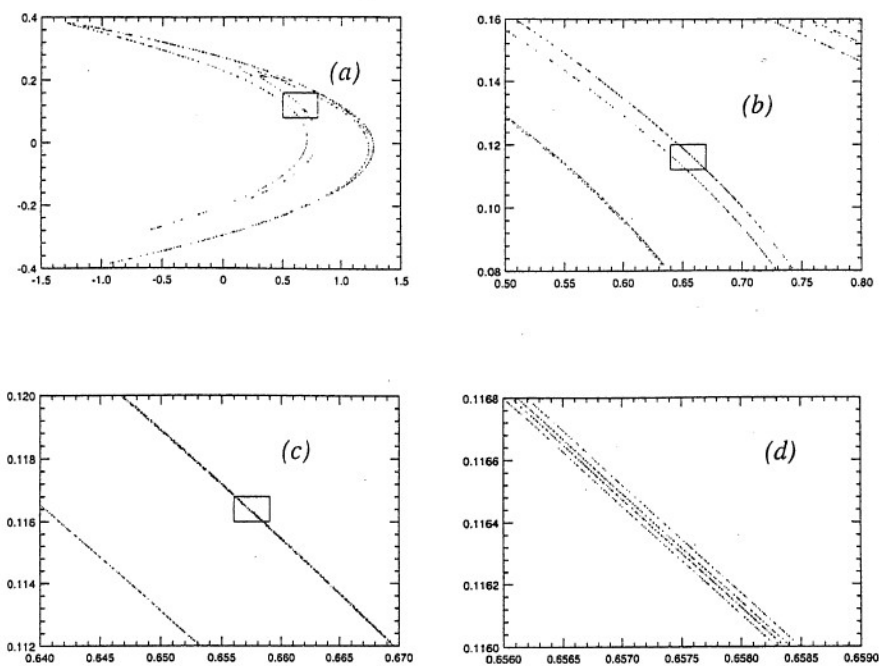


Figura 5.—Atractor de Hénon. En cada una de las figuras (a), (b), (c) y (d) se han dibujado sólo mil puntos situados sobre el atractor. Las (b), (c) y (d) son ampliación de los recuadros señalados en (a), (b) y (c), respectivamente.

Autosemejanza

Se dice que un objeto es autosemejante cuando su representación gráfica presenta el mismo aspecto aun cuando se utilicen diferentes escalas. El ejemplo más familiar de objeto plano autosemejante es el gráfico de la espiral logarítmica, de ecuación en coordenadas polares

$$\rho = \rho_0 \exp(k\theta), \quad \rho_0 > 0, \quad k \text{ constante.} \quad (31)$$

Puesto que ángulos que difieren en 2π tienen la misma representación en el plano, es evidente que un cambio de escala por un factor $\exp(2\pi k)$ deja el gráfico invariante: es exactamente autosemejante con dicho factor de escala. Y, por supuesto, también con cualquier factor $\exp(2\pi mk)$, con m entero. Para otros cambios de escala, el gráfico no resulta invariante, pero conserva el mismo aspecto, como puede observarse en la Figura 6.

Los atractores extraños gozan de esa propiedad de autosemejanza. En la Figura 5 se representa el atractor de Hénon, del que he hablado antes, y se puede ver cómo las repetidas ampliaciones muestran siempre la misma estructura.

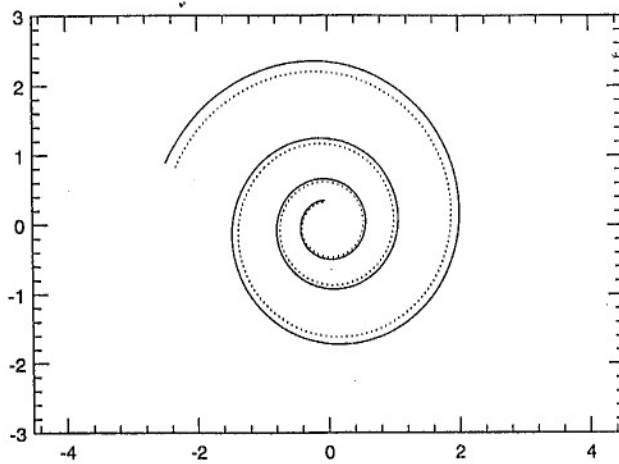


Figura 6.—Espiral logarítmica. La línea continúa es un fragmento del gráfico de la función $\rho = \rho_0 \exp(k\theta)$, con $\rho_0 = 2$ y $k = 0.1$, que es invariante en un cambio de escala por un factor $\exp(2\pi k)$. La línea de puntos se obtiene de la línea continúa en el cambio de escala por un factor 0.5.

Conjuntos de Cantor

A finales del siglo pasado, el matemático Georg Cantor, creador de la Teoría de Conjuntos, sorprendió a sus colegas con algo cuya existencia resultaba increíble incluso para él mismo, a pesar de que poseía la demostración: un conjunto de números reales comprendidos entre 0 y 1 que era de medida nula y al mismo tiempo no numerable. La expresión “de medida nula” viene a decir que, si representásemos esos puntos en un segmento de longitud 1 y lanzásemos contra el segmento un dardo que impactase al azar sobre él, tendríamos probabilidad nula de acertar sobre uno de tales puntos. Esto, que sugiere una idea intuitiva de escasez de esos puntos en el intervalo $[0, 1]$, contrasta con la impresión de abundancia que produce el hecho de que constituyen un conjunto no numerable, como el de todos los números reales.

Formalmente se define un conjunto de Cantor como uno totalmente inconexo, cerrado y perfecto. Un conjunto totalmente inconexo no tiene elementos interiores; es cerrado si incluye los elementos de su frontera, es decir, los elementos en cuyo entorno, por pequeño que sea, hay tanto elementos pertenecientes como ajenos al conjunto; es perfecto si coincide con el conjunto de sus elementos de acumulación. Pero es mucho más fácil imaginarse un conjunto de Cantor recurriendo a símiles gráficos. El más conocido es el que se obtiene a partir del intervalo $[0, 1]$ por *repetida supresión del tercio abierto central*, cuyas

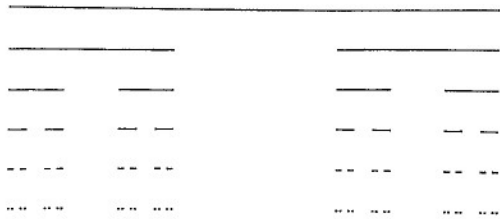


Figura 7.—Primeras etapas de un proceso infinito que, en el límite, genera un conjunto de Cantor.

sucesivas etapas se ilustran en la Figura 7. Se comienza con el intervalo cerrado $[0, 1]$. En la primera etapa se excluyen los puntos del tercio abierto central, o sea los del intervalo abierto $(1/3, 2/3)$. En la segunda etapa se suprime el tercio abierto central en cada uno de los dos intervalos cerrados que quedaban, es decir, se excluyen los puntos de los intervalos abiertos $(1/9, 2/9)$ y $(7/9, 8/9)$. Y así sucesivamente. Lo que queda después de infinitas etapas es un conjunto que MANDELBROT [6] acertadamente denominó *polvo de Cantor*. En ese conjunto resultante no hay ningún intervalo; sólo puntos aislados. O en otras palabras, siempre veríamos huecos cualquiera que fuese el aumento de la lupa con que lo pudiésemos examinar. Así pues, el conjunto de Cantor es totalmente discontinuo, como la materia formada por átomos, y, paradójicamente, es infinitamente divisible, como ocurre con el continuo. Para aquellos que prefieran los números a los gráficos, el conjunto de Cantor a que me estoy refiriendo es el de los números que pueden escribirse en la forma

$$\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \dots + \frac{t_n}{3^n} + \dots, \quad (32)$$

donde los t_n pueden tomar solamente los valores 0 y 2; o también, usando un sistema ternario de numeración, en la forma

$$0.t_1t_2\dots t_n\dots, \quad (33)$$

Y ya que he hablado hace un momento de autosemejanza, cabe decir que el conjunto de Cantor a que me estoy refiriendo es autosemejante en un cambio de escala por un factor 3. En efecto; a partir de la representación ternaria dada en (33) se ve inmediatamente que los elementos del conjunto que resulta al multiplicar por dicho factor serían de la forma $t_1.t_2t_3\dots t_n\dots$, y si nos restringimos al intervalo $[0, 1]$ quedan en la forma $0.t_2t_3\dots t_n\dots$, que es equivalente a (33).

Pues bien; estos curiosos conjuntos parecen tener predilección por los sistemas caóticos; o viceversa. Ya he mencionado antes, al hablar del mapping standard, que los KAM-toros, al aumentar el parámetro de no linealidad, pasan a ser conjuntos de Cantor justo antes de desaparecer, es decir, en la transición del comportamiento cuasiperiódico del sistema

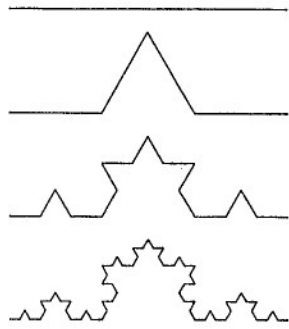


Figura 8.—Primeras etapas de un proceso infinito que, en el límite, genera la curva de Koch.

al caótico. Y resulta que, en los mappings disipativos, como el de Hénon, las secciones transversales de los atractores extraños tienen también la estructura de conjuntos de Cantor:

Fractales

La manera más sencilla de obtener estructuras autosemejantes es, partiendo de un objeto dado, repetir una cierta operación algebraica, simbólica o geométrica, a escala cada vez más pequeña. El ejemplo clásico es la conocida *curva de Koch* en el plano. Se comienza con un segmento de recta, por ejemplo de longitud 1, que va a servir de *iniciador*. Entonces se reemplaza el tercio central por los otros dos lados del triángulo equilátero que se levantaría sobre él, tal como se indica en la Figura 8. La línea quebrada que resulta es el *generador*. A continuación se hace lo mismo en cada uno de los tramos rectos del generador, prestando atención al sentido de recorrido de cada uno de esos tramos. Y así se va repitiendo el proceso indefinidamente. El límite, la curva de Koch, es una línea continua pero no diferenciable, es decir, sin que sea posible trazar tangentes a ella, en ningún punto. Hace ya más de un siglo, Weierstraß tuvo que dar ejemplos de curvas de este tipo para vencer la incredulidad de sus colegas (entre ellos Hermite) acerca de su existencia. La curva de Koch es la ilustración más clara de lo que se entiende por un fractal: un objeto geométrico tal que el número de sus dimensiones es, en términos coloquiales, fraccionario. Pero analicemos esto con un poco más de cuidado.

Intuitivamente comprendemos que, como se nos enseñó en nuestros primeros encuentros con la Geometría, un punto no tiene dimensiones, o sea, es de dimensión 0; una

curva tiene dimensión 1; una superficie, 2; y una figura tal como un cubo o un cono, es de dimensión 3. Pero, dado que la intuición muchas veces nos traiciona, conviene utilizar una definición no subjetiva de dimensión. Pensemos, por ejemplo, en lo que se conoce como *dimensión de Hausdorff*. Consideremos un trozo de curva suave de longitud L . Un valor aproximado de esa longitud se obtiene tratando de recorrerla con segmentos rectos de longitud r , contando el número $N(r)$ de esos segmentos que han sido necesarios, y calculando el producto $N(r) \cdot r$. Es evidente que nos aproximamos a la longitud real de la curva si vamos disminuyendo la longitud r de los segmentos utilizados. De hecho,

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r. \quad (34)$$

Análogamente, si tenemos un trozo de superficie, de área S , podemos tratar de cubrirla con $N(r)$ cuadrados de lado r , y encontraríamos

$$S = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r^2. \quad (35)$$

Y para un cierto volumen V , usando cubos de lado r , tendríamos

$$V = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r^3. \quad (36)$$

La dimensión de Hausdorff de esas figuras no es otra cosa que el exponente con que aparece r en esas expresiones de la longitud, el área y el volumen, o sea, 1, 2 y 3, respectivamente, como era de esperar. Así pues, designando por A la longitud, superficie o volumen de la figura, según el caso, y por D_H su dimensión de Hausdorff, se tiene

$$A = \lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r^{D_H}, \quad (37)$$

o, equivalentemente,

$$D_H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)}. \quad (38)$$

Y esto es lo que se toma como definición de dimensión de Hausdorff. Vamos ahora a aplicarla a la curva de Koch obtenida a partir del segmento de longitud 1. En primer lugar observamos que en cada una de las sucesivas etapas se multiplica por 4 el número de segmentos rectos que forman la línea quebrada, al tiempo que la longitud de cada segmento queda dividida por 3. Así pues, tras n etapas, se tiene

$$N(r) = 4^n, \quad r = \frac{1}{3^n}. \quad (39)$$

Y, por tanto,

$$D_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 4}{n \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1.26186. \quad (40)$$

De modo análogo se puede obtener la dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor a que me he referido antes: en cada etapa se dobla el número de segmentos al tiempo que

la longitud de éstos se reduce por un factor $1/3$. La dimensión de Hausdorff resulta ser, pues,

$$\frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0.63093. \quad (41)$$

Así que el conjunto de Cantor es algo intermedio entre un punto (o un conjunto numerable de puntos aislados) y un segmento. Y la curva de Koch algo entre un segmento y el cuadrado construido sobre ese segmento.

Adviértase que, pese a lo que el nombre sugiere, la dimensión de Hausdorff de un fractal no es necesariamente una fracción en el sentido habitual de cociente de dos enteros. En los dos ejemplos expuestos resultan valores no enteros, pero no fracciones. Pero es que además se tienen fractales de dimensión entera, como es el caso de la llamada *curva de Hilbert* encerrada en un cuadrado de lado 1: aunque topológicamente es una línea, su dimensión de Hausdorff es 2. Y eso se corresponde con el hecho de que dicha curva pasa tan cerca como se quiera de cualquier punto del interior del cuadrado.

Como ya he mencionado antes, los atractores que aparecen en los mappings disipativos son fractales. De ahí el calificativo de *extraños* que se les aplica.

Problemas actuales

Tras hablar de la Dinámica de Sistemas Caóticos y de algunas de las peculiaridades del Caos, lo procedente ahora sería dar al menos una visión panorámica del desarrollo que está teniendo esa Dinámica, tanto en su vertiente teórica como en la aplicada. Pero requeriría mucho tiempo el tratar simplemente de presentar las diferentes líneas de trabajo que se están siguiendo y los logros que se están obteniendo en cada una de ellas. Como no quiero abusar de la paciencia de los presentes, debo limitarme a una mera enumeración, por supuesto incompleta.

En lo que concierne a los aspectos más teóricos o básicos, siguen siendo objeto de intenso estudio los mecanismos de instauración del caos en sistemas periódicos al variar uno de los parámetros. Se conocen tres grandes categorías de lo que se denomina *rutaa al caos*: intermitencia, duplicación del período y cuasiperiodicidad. La cuestión es saber si son estas las únicas posibles o existen otros mecanismos que todavía no conocemos.

Por otra parte, el teorema KAM (de Kolmogorov, Arnold y Moser) asegura la permanencia de órbitas o historias cuasiperiódicas aún en presencia de términos no lineales, siempre que la intensidad de esos términos se mantenga por debajo de un cierto valor. La cota así fijada por el teorema queda muy por debajo de la que experimentalmente puede encontrarse. Está abierto, pues, el problema de mejorar la demostración del teorema KAM de modo que se obtengan cotas más próximas a los valores reales.

Siguiendo con los problemas más básicos, es obligado mencionar lo que suele llamarse el problema ergódico en Mecánica Estadística. La hipótesis de Boltzmann, que constituye el

fundamento para utilizar magnitudes estadísticas en lugar de dinámica microscópica, está lejos de ser probada, dado que la mayor parte de los sistemas caóticos no son ergódicos. También quiero referirme al interés que existe en extender a sistemas dinámicos de tres o más dimensiones los resultados que ya se han obtenido en sistemas, mucho más sencillos, de una o dos dimensiones. Asimismo, está habiendo una gran actividad investigadora en lo que se conoce como Caos Cuántico, que tiene por objeto el estudio de las peculiaridades de sistemas cuánticos cuyos análogos clásicos son caóticos. Es un problema muy interesante entender el modo en que los efectos cuánticos inhiben lo que de otro modo sería un comportamiento caótico.

En el terreno de las aplicaciones, quizá lo más destacado sea lo que podría denominarse control del caos, mediante perturbaciones adecuadas. De ese modo se pretende influir para mantener la regularidad e impedir un comportamiento caótico en sistemas tan diversos como cadenas de moléculas o de spines, reacciones químicas, especies vegetales o animales, marcapasos cordiales, satélites artificiales, etc.. El conocimiento de las resonancias y las islas de estabilidad dentro de las bandas estocásticas es del mayor interés para entender, por ejemplo, la ausencia de órbitas en ciertas regiones ("gaps" de Kirkwood) del cinturón de asteroides del Sistema Solar, o para su aprovechamiento en el diseño de confinadores de plasma o de aceleradores de partículas. Y el estudio de las turbulencias es fundamental en problemas de mecánica de fluidos y de combustión.

* * *

No sé si habré conseguido hacer ver a la audiencia el enorme interés, tanto intrínseco como por sus aplicaciones, de la Dinámica de Sistemas Caóticos surgida a partir de la Memoria de Poincaré de que hablaba al principio. Pero aquellos que benévolamente me hayan prestado su atención hasta ahora, deben sin duda sentirse defraudados porque no he respondido a la pregunta crucial planteada al comienzo de este discurso: ¿Es el Sistema Solar estable? Humildemente hay que confesar que no lo sabemos. Pero en la Ciencia, la mayor parte de las veces, lo importante no es encontrar respuestas, sino formular preguntas. En el camino para hallar respuesta a esas preguntas suelen encontrarse resultados muchas veces más interesantes que la propia respuesta a la pregunta original. Poincaré no acertó a resolver la cuestión planteada por Weierstraß, ni siquiera en el caso simplificado del problema de tres cuerpos restringido. Pero en sus esfuerzos para dar con una solución, nos descubrió un nuevo mundo en el dominio de la Ciencia. Un mundo, además, en el que para hacer investigación no se necesitan grandes conocimientos previos ni instalaciones costosas, y que, por lo tanto, está al alcance de nuestros estudiantes de Licenciatura. Un mundo, en definitiva, apasionante y que nos reserva muchas sorpresas.

El hallazgo de Poincaré ha venido a modificar drásticamente la formulación de modelos

científicos. Por un lado ha establecido límites fundamentales a la posibilidad de hacer predicciones con dichos modelos. Pero por otro lado ha hecho que fenómenos cuyo estudio no se sabía cómo abordar, por entenderse que eran aleatorios, puedan ser analizados con modelos deterministas en régimen caótico.

Hay que librarse de la tendencia a considerar un comportamiento caótico como algo insatisfactorio a causa de su carácter impredecible. Pensemos que ese mismo caos puede ser responsable de la amplificación de pequeñas fluctuaciones que, fijadas en los códigos genéticos de las plantas o de los animales, hayan permitido la evolución de las especies. Más aún (y termino con estas palabras de CRUTCHFIELD *et al.* [3]):

“El mismo proceso del progreso intelectual se basa en la inyección de nuevas ideas y en nuevos modos de conectar las viejas. Bajo la creatividad innata podría haber un proceso caótico subyacente que amplifica selectivamente pequeñas fluctuaciones y las moldea en estados mentales coherentes y macroscópicos que se experimentan como pensamientos. En algunos casos, los pensamientos pueden ser decisiones o lo que se siente como ejercicio de la voluntad. Desde esta perspectiva, el caos proporciona un mecanismo que permite el libre albedrío en un mundo gobernado por leyes deterministas.”

Referencias

- [1] J. BARROW-GREEN. *Poincaré and the Three Body Problem*, American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 1997.
- [2] B. V. CHIRIKOV. *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*, Phys. Rep. 52 (1979) 263–379.
- [3] J. P. CRUTCHFIELD, J. D. FARMER, N. H. PACKARD & R. S. SAW. *Chaos*, Sci. Amer. 254 (1986) 46–57.
- [4] M. HÉNON. *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Commun. Math. Phys. 50 (1976) 69–77.
- [5] T.Y. LI & J. A. YORKE. *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly 82 (1975) 985–992.
- [6] B. B. MANDELBROT. *The Fractal Geometry of Nature*, V. H. Freeman, New York, 1982.
- [7] R. M. MAY & G. F. OSTER. *Bifurcations and dynamical complexity in simple ecological models*, Amer. Natur. 110 (1976) 573–599.

- [8] P. A. B. MORAN. *Some remarks on animal population dynamics*, Biometrics 6 (1950) 250–258.
- [9] J. MOSER. *Is the Solar System Stable?*, Mathematical Intelligencer 1 (1978) 65–71.
- [10] M. PARAMIO & J. SESMA. *A continued-fraction procedure to determine invariant directions in twist mappings*, Phys. Lett. A 117 (1986) 333–336.
- [11] M. PARAMIO & J. SESMA. *Breakdown of KAM tori in the standard map*, Phys. Lett. A 124 (1987) 345–350.
- [12] M. PARAMIO & J. SESMA. *Invariant directions in the Hénon map*, Phys. Lett. A 132 (1988) 98–100.
- [13] A. RAÑADA. *Dinámica Clásica*, Alianza Editorial, Madrid, 1990.
- [14] W. E. RICKER. *Stock and recruitment*, J. Fish. Res. Bd. Canad. 11 (1954) 559–623.
- [15] M. SCHROEDER. *Fractals, Chaos, Power Laws*, W. H. Freeman, New York, 1991.