Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **57:** 89–112, (2002).

Homotopía propia simplicial I *

J. M. García Calcines[1] L. J. Hernández Paricio[2]
S. Rodríguez Machín[1]

[1] *Departamento de Matemática Fundamental*
Universidad de la Laguna
38271 La Laguna, SPAIN
E-mails: jmgarcal@ull.es, seroma@ull.es

[2] *Departamento de Matemáticas y Computación*
Universidad de La Rioja
26004 Logroño, SPAIN
E-mail: luis-javier.hernandez@dmc.unirioja.es

Abstract

The notion of exterior space consists of a topological space together with a certain nonempty family of open subsets that is thought of as a 'system of open neighborhoods at infinity'. An exterior map is a continuous map which is 'continuous at infinity'. In this paper we present and develop the category of exterior spaces as a good framework for proper homotopy theory. As an application we give a new version of the Whitehead theorem for proper homotopy theory. We also give simplicial models for this new category and we analyze singular and realization-type functors for these models.

1 Introducción

Uno de los problemas existentes en la categoría de los espacios y aplicaciones propias, **P**, es que no verifica la axiomática de Quillen (que exige tener límites y colímites finitos) pues la categoría **P** no tiene objeto final y en general no existen push-outs. Una forma de establecer un marco de trabajo en teoría de homotopía propia es escoger axiomáticas menos restrictivas, como la noción de categoría cofibrada. En este sentido se demuestra que **P** tiene estructura de categoría cofibrada [7]. Existen otras posibilidades, por ejemplo, se puede encajar **P** en una categoría completa y cocompleta y usar teorías de homotopía que asuman la existencia de límites y colímites. En esta dirección, se tiene el encaje de Edwards y Hastings de la subcategoría de **P** de los espacios σ-compactos, Hausdorff y localmente compactos en la categoría de homotopía de proespacios. Una desventaja de este encaje es la gran restricción hecha en **P**. Otro problema es que las contrucciones homotópicas producen proespacios que muchas veces no pueden ser interpretados geométricamente como espacios. García-Pinillos [14] propone en su tesis una nueva solución. Introduce la noción de espacio exterior, de forma que la categoría de los espacios exteriores, **E**, es completa y cocompleta y demuestra que **P** se puede considerar como una subcategoría plena suya. Además, **E**, tiene varias estructuras de categoría de modelos cerrada.

Por otro lado, la obtención de modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios topológicos ha sido un objetivo primordial en la homotopía algebraica. Uno de los primeros modelos con información

*Los autores quieren agradecer a la Dirección General de Enseñanza Superior y a la Dirección General de Universidades e Investigación del Gobierno de Canarias por su aportación financiera en la realización de ese trabajo.

algebraica sobre tipos de homotopía fueron los complejos de cadenas de grupos abelianos. En su estudio tuvo lugar un proceso de algebraización de la teoría de homotopía topológica que produjo el concepto de homotopía entre aplicaciones de cadenas. La obtención de adecuados modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios ha conducido, con el tiempo, al intento de hacer teoría de homotopía con tales modelos algebraicos con el objetivo de utilizar métodos algebraicos que aparecen más simples que aquellos de los espacios topológicos.

El objetivo principal de este trabajo es el de presentar técnicas simpliciales para las categorías de homotopía propia, así como buscar modelos axiomáticos adecuados para dichas categorías. Aquí presentamos una memoria de los resultados obtenidos sin incluir demostraciones, de forma que el lector pueda hacerse una idea más concreta de lo obtenido. El marco de trabajo usado para la categoría propia es la categoría de los espacios exteriores. Para ello se presentan nuevos resultados de gran interés, que dejará ver la utilidad de **E** como una herramienta eficaz para el estudio de la homotopía propia.

Siguiendo todas estas ideas este trabajo se ha estructurado en tres partes: La primera consiste en una sección preliminar, donde se establecen nociones y resultados bien conocidos sobre categorías simpliciales, de modelos cerrada y categorías de prehaces. En la segunda se establecen, por un lado, resultados, generalizaciones y nuevas nociones para **E**. También se generalizan leyes exponenciales, en concreto se tiene, por un lado $Hom_{\mathbf{E}}(X\bar{\times}Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(Y, Z^X)$, para X, Z espacios exteriores, X con ciertas propiedades adicionales, e Y espacio topológico; por otro $Hom_{\mathbf{E}}(X\bar{\times}Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{E}}(X, Z^Y)$, con X, Z espacios exteriores, Y espacio topológico localmente compacto. También se establece el enriquecimiento de la estructura de modelos cerrada dada por García-Pinillos, que aquí se denominará *e-estructura*, por una estructura de categoría simplicial compatible suya. Se consideran en **E** unos nuevos morfismos:

- g-equivalencias débiles (resp. g-fibraciones), que son equivalencias débiles (resp. fibraciones) en el sentido de García-Pinillos, tales que al olvidar su estructura exterior son equivalencias débiles clásicas en **Top**;
- g-cofibraciones, que son aquellos que verifican la propiedad de elevación de homotopía a izquierda respecto de las g-fibraciones triviales.

Con estos morfismos **E** es una categoría simplicial de modelos cerrada (*g-estructura*). Unos objetos cofibrantes en esta categoría son los denominados *gCW complejos*. Estos espacios exteriores X están dotados de una filtración, $\emptyset = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset ... \subset X^n \subset ... \subset X$, de forma que el n-esqueleto se obtiene del (n-1)-esqueleto pegando celdas de dos tipos: las clásicas celdas compactas y un tipo especial de celdas no compactas. En estos espacios las equivalencias de homotopía exterior se caracterizan por los grupos de homotopía de tipo Brown y por los grupos de homotopía clásicos, mediante un teorema de tipo Whitehead, que tendrá una adaptación para la categoría **P**. En la siguiente sección se hacen una comparación entre las distintas estructuras homotópicas de **E**, la e-estructura y la g-estructura, así como la de **Top**.

La tercera parte es de naturaleza más algebraica. En ésta se da una construcción de modelos de tipo simplicial, allanando el camino para un próximo estudio de las nociones de homología en los espacios exteriores. En concreto se presentan los M-conjuntos simpliciales y los conjuntos simpliciales exteriores. El primer modelo no es más que la categoría de objetos simpliciales de los conjuntos con la acción de un determinado monoide M. Se define en esta categoría:

- equivalencia débil (resp. fibración), a aquel morfismo que al olvidar la acción del monoide es equivalencia débil (resp. fibración) en conjuntos simpliciales;
- y cofibración, a aquel morfismo que verifica la propiedad de elevación de homotopía a izquierda respecto de las fibraciones triviales.

Con estos morfismos se tiene la existencia de una estructura de categoría simplicial de modelos cerrada. A continuación se compara dicho modelo con $\mathbf{E}$, viéndose la existencia de una adjunción del tipo singular-realización, adjunción que se hereda en las categorías localizadas respectivas (proceso que necesita muchas comprobaciones previas). También se introduce, asociado a cada espacio exterior X, y vía un M-conjunto simplicial, un conjunto simplicial, denominado *prismas infinitos*, cuya importancia radica en que sus grupos de homotopía recogen información sobre los grupos de homotopía de tipo Steenrod de X. En las dos siguientes secciones se estudia el segundo modelo: la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores; ésta tiene una estructura de categoría simplicial, dotada de tensor y exponenciación en el sentido de Quillen y, al igual que con los M-conjuntos simpliciales, se tiene la existencia de una adjunción del tipo singular-realización con los espacios exteriores. Se destaca la extensión de la noción de exterior a otras categorías, como conjuntos (resp. grupos abelianos) exteriores y grupos abelianos simpliciales exteriores, así como también para funtores. En esta línea se estudia la categoría de objetos simpliciales de los conjuntos exteriores. Para finalizar se analiza la categoría de los grupos abelianos simpliciales exteriores. Esta tiene propiedades similares a la de los conjuntos simpliciales exteriores, en concreto, también es una categoría simplicial. Se dan dos relaciones funtoriales: por un lado, un funtor que relaciona esta categoría con la de objetos simpliciales de los grupos abelianos exteriores. Por otro, mediante adjunciones del tipo libre-olvido con las categorías análogas de conjuntos.

2 Preliminares.

2.1 Categorías simpliciales de modelos cerradas.

La teoría de homotopía axiomática consiste en el desarrollo de las construcciones básicas de la teoría de homotopía en un contexto abstracto, de forma que pueda aplicarse a otras categorías. La aproximación más conocida es la de Quillen, que introduce la noción de categoría de modelos (cerrada).

Dado un diagrama conmutativo de flechas continuas en una categoría $\mathbf{C}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dotted] & Y, \end{tikzcd}$$

se dice que i tiene la propiedad de elevación a izquierda (PEI) respecto de p, o bien que p tiene la propiedad de elevación a derecha (PED) respecto de i si existe un morfismo $h : B \to X$ tal que $hi = u$ y $ph = v$.

Una categoría de modelos cerrada es una categoría $\mathbf{C}$ junto con tres clases distinguidas de morfismos, llamadas *cofibraciones*, *fibraciones* y *equivalencias débiles*, satisfaciendo los axiomas CM1-CM5 (véase [32]). Puede verse una reformulación equivalente en [31].

Dada una categoría de modelos cerrada $\mathbf{C}$, la *categoría homotópica* $\mathbf{Ho(C)}$, se obtiene a partir de $\mathbf{C}$ invirtiendo formalmente todas las equivalencias débiles (véase [12] y [31]).

El objeto inicial de $\mathbf{C}$ se denota por $\emptyset$, mientras que al objeto final por $*$. Se dice que un objeto X es *cofibrante* si el único morfismo $\emptyset \to X$ es una cofibración; dualmente X es *fibrante* si $X \to *$ es una fibración. Se denota por $\mathbf{C_{cof}}$ y $\mathbf{C_{fib}}$ a las subcategorías plenas de $\mathbf{C}$ determinadas, respectivamente, por los objectos cofibrantes y fibrantes.

Ejemplo: Se considera la categoría $\mathbf{SS}$ de conjuntos simpliciales. Es bien conocido el hecho de que es una categoría de modelos cerrada con la siguiente estructura: una aplicación simplicial $f : X \to Y$ es una fibración (resp. fibración trivial) si verifica la PED respecto de $V(n,k) \hookrightarrow \Delta[n]$, para $0 \leq k \leq n$ y $n > 0$ (resp. de $\dot{\Delta}[n] \hookrightarrow \Delta[n]$, para $n \geq 0$), donde $V(n,k)$ es el subconjunto simplicial generado por las i-caras, $i \neq k$, del n-símplex estándard $\Delta[n]$; $\dot{\Delta}[n]$ está generado por todas las caras de $\Delta[n]$. Una aplicación simplicial $i : A \to B$ es una cofibración (resp. cofibración trivial) si verifica la PEI respecto de las fibraciones triviales (resp. de las fibraciones). Finalmente, una equivalencia débil es una aplicación simplicial que puede factorizarse como una cofibración trivial seguida de una fibración trivial.

Si X y K son conjuntos simpliciales, denotaremos por X^K al conjunto simplicial dado por $(X^K)_q = Hom_{\mathbf{SS}}(K \times \Delta[q], X)$.

Una *categoría simplicial* es una categoría $\mathbf{C}$ junto con un funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{SS}$, satisfaciendo las condiciones dadas en [31], páginas 1.1 y 1.2; en particular tenemos que $\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)_0 \cong Hom(X,Y)$. Asociada a toda categoría simplicial $\mathbf{C}$, está la categoría $\pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{C})$, cuyos objectos son los mismos que los de $\mathbf{C}$ y cuyo conjunto de morfismos viene definido por $Hom_{\pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{C})}(X,Y) = \pi_0 \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$, donde $\pi_0 \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ es el conjunto de las componentes conexas del conjunto simplicial $\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$.

Una *categoría de modelos simplicial cerrada* es una categoría de modelos cerrada $\mathbf{C}$ que es también una categoría simplicial y que satisface los axiomas SM0 y SM7 ([31], página 2.2).

Ejemplo: Se denota por **Top** a la categoría de los espacios topológicos y aplicaciones continuas. Un morfismo $f : X \to Y$ en **Top** se dice que es *fibración* si es una aplicación fibrada en el sentido de Serre, y una *equivalencia débil* si es una equivalencia de homotopía débil (esto es, $\pi_q(X,x) \xrightarrow{\cong} \pi_q(Y, f(x))$, para todo $x \in X$ y $q \geq 0$). Una aplicación continua se dice que es una *cofibración* si verifica la propiedad de elevación a izquierda respecto de las fibraciones triviales. Por otro lado, si X e Y son espacios, se considera $\underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,Y)$ dada por $\underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,Y)_n = Hom_{\mathbf{Top}}(X \times |\Delta[n]|, Y)$ con las operaciones simpliciales naturales, donde $|.|$ denota la realización geométrica. Si $f \in \underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,Y)_n$ y $g \in \underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,Z)_n$, se define $g \circ f$ como la composición

$$X \times |\Delta[n]| \xrightarrow{id_X \times \Delta} X \times |\Delta[n]| \times |\Delta[n]| \xrightarrow{f \times id_{|\Delta[n]|}} Y \times |\Delta[n]| \xrightarrow{g} Z.$$

Considerando $X \otimes K = X \times |K|$ y $X^K = X^{|K|}$, Quillen probó que **Top**, con esta estructura, es una categoría simplicial de modelos cerrada.

La definición de categoría simplicial de modelos cerrada no es muy práctica, por lo que muchas veces se hace uso de una equivalencia más manejable: Sea $\mathbf{C}$ una categoría simplicial que satisface los axiomas **M0** y **SM0**, con cuatro clases distinguidas de morfismos: fibraciones, cofibraciones, fibraciones triviales y cofibraciones triviales, tales que la primera y la cuarta (resp. la segunda y la tercera) determina cada una por propiedades de elevación como en **M6** (a) y (b) de la definición de categoría de modelos cerrada. Entonces **SM7** es equivalente a

SM7(a): Si f es fibración (resp. fibración trivial) entonces el morfismo inducido en el pull-back,

$$\begin{tikzcd}
X^{\Delta[n]} \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "f^{id_{\Delta[n]}}"] \arrow[ddr, bend right, "(id_X)^j"'] & & \\
& X^{\dot{\Delta}[n]} \times_{Y^{\dot{\Delta}[n]}} Y^{\Delta[n]} \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & Y^{\Delta[n]} \arrow[d, "(id_Y)^j"] \\
& X^{\dot{\Delta}[n]} \arrow[r, "f^{id_{\dot{\Delta}[n]}}"'] & Y^{\dot{\Delta}[n]},
\end{tikzcd}$$

es una fibración (resp. fibración trivial), donde $j : \dot{\Delta}[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ denota la inclusión, y

$$
\begin{tikzcd}
X^{\Delta[1]} \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "f^{id_{\Delta[1]}}"] \arrow[ddr, bend right, "(id_X)^{l_k}"'] & & \\
& X^{V(1,k)} \times_{Y^{V(1,k)}} Y^{\Delta[1]} \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & Y^{\Delta[1]} \arrow[d, "(id_Y)^{l_k}"] \\
& X^{V(1,k)} \arrow[r, "f^{id_{V(1,k)}}"'] & Y^{V(1,k)}
\end{tikzcd}
$$

es fibración trivial, donde $l_k : V(1,k) \hookrightarrow \Delta[1]$ es la inclusión, $k \in \{0,1\}$.

2.2 Categorías de prehaces.

Sea $\mathbf{C}$ una categoría pequeña, se define la *categoría de prehaces* de $\mathbf{C}$, a la categoría $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$. A los objetos de $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ se les denomina *prehaces* de $\mathbf{C}$. La notación usual es $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$.

Todo objeto C de $\mathbf{C}$ se puede considerar de forma natural como el prehaz,

$$y(C) = Hom_{\mathbf{C}}(\_, C).$$

Si P es un prehaz, se dirá que es *representable* si existe un objeto C tal que $y(C)$ y P son naturalmente isomorfos. Por otro lado, si $f : C_1 \to C_2$ es un morfismo, se define $y(f) : y(C_1) \to y(C_2)$, dado como $y(f)_C = f_*$. Esto da lugar a un funtor fiel y pleno $y : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ denominado *encaje de Yoneda.*

Sea P un prehaz, se define la *categoría de elementos* de P, $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{P}$, también llamada *categoría de Grothendieck* de P, a aquella que tiene por objetos pares de la forma (C, x), donde C es un objeto de $\mathbf{C}$ y $x \in P(C)$. Un morfismo $\tilde{u} : (C, x) \to (C', x')$ consiste en un morfismo de $\mathbf{C}$, $u : C \to C'$, tal que $P(u)(x') = x$. Esta categoría tiene un funtor proyección $\pi_P : \int_{\mathbf{C}} \mathbf{P} \to \mathbf{C}$ dado como $\pi_P((C, x)) = C$.

Si $A : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ es un funtor desde una categoría pequeña a una categoría cocompleta, el funtor

$$R : \mathbf{E} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}},$$

dado por $R(E)(C) = Hom_{\mathbf{E}}(A(C), E)$ tiene un funtor adjunto a izquierda $L : \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}} \to \mathbf{E}$ definido para cada prehaz, P, como el colímite

$$L(P) = colim\ (\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi_P} \mathbf{C} \xrightarrow{A} \mathbf{E}).$$

Como consecuencia, si P es un prehaz, entonces

$$P \cong colim\ (\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi_P} \mathbf{C} \xrightarrow{y} \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}),$$

es decir, todo prehaz es colímite de prehaces representables.

Otro resultado interesante que se deduce es el siguiente: para cada funtor $A : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ desde una categoría pequeña a una categoría cocompleta existe un funtor $L : \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}} \to \mathbf{E}$ verificando

(i) L preserva colímites.

(ii) L hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "y"] \arrow[d, "A"'] & \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}} \arrow[dl, "L"'] \\
\mathbf{E}. &
\end{tikzcd}
$$

Además, este funtor L con las propiedades (i) y (ii) es único salvo isomorfismo y se puede definir como

$$L(P) = colim\ (\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi_P} \mathbf{C} \xrightarrow{A} \mathbf{E}).$$

3 Espacios exteriores.

Se presenta el contexto en el que estará totalmente inmerso el trabajo: la categoría de los espacios exteriores. En la primera parte se ven sus propiedades básicas, así como otra interpretación de esta categoría. En la siguiente se desarrollan leyes exponenciales generales, cruciales para la determinación y relación de estructuras e invariantes homotópicos. Posteriormente se generaliza enriqueciendo esta categoría con estructuras de categoría simplicial de modelos cerrada con la llamada g-estructura. Además se dará la noción de gCW complejo, objeto g-cofibrante para esta estructura, y se podrán dar teoremas de tipo Whitehead. Por último, se harán comparaciones entre las distintas estructuras axiomáticas de la categoría de los espacios exteriores: la e-estructura, dada por García-Pinillos, y la mencionada g-estructura, introducida aquí, así como la existente en **Top**, los espacios topológicos con aplicaciones continuas.

3.1 La categoría de los espacios exteriores, primeras propiedades.

Intuitivamente hablando, un espacio exterior es un espacio topológico enriquecido con un sistema de entornos en el "infinito". El comportamiento de los complementos de sus compacto-cerrados inspira la definición abstracta de exterior.

Definición 3.1 Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *externología* en (X, τ) es una colección no vacía de abiertos, $\varepsilon \subset \tau$, tal que

(i) Si E_1, $E_2 \in \varepsilon$ entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;

(ii) Si $E \in \varepsilon$, $U \in \tau$ y $E \subset U$ entonces $U \in \varepsilon$.

A los elementos de ε se les denomina *abiertos externos* o *e-abiertos*. Un *espacio exterior* consiste en un espacio topológico junto con una externología. Se denotará por $(X, \varepsilon \subset \tau)$.

De esta definición de externología se deducen algunas propiedades inmediatas, entre ellas cabe destacar que una externología ε es una topología si y sólo si $\emptyset \in \varepsilon$ si y sólo si $\varepsilon = \tau$. También, que la unión de un e-abierto con un abierto es un e-abierto y que el espacio total, X, es siempre un e-abierto.

Ejemplos:

Dado un espacio topológico (X, τ) se tiene la externología formada por los complementos de sus compacto-cerrados: $\varepsilon_{cc}^X = \{E \in \tau : X\text{-}E \text{ es compacto}\}$. Otras externologías que se le pueden asignar son la trivial, $\varepsilon = \{X\}$, y la propia topología, $\varepsilon = \tau$.

Obsérvese que si X es un espacio compacto entonces $\emptyset \in \varepsilon_{cc}^X$ y, por tanto, $\varepsilon_{cc}^X = \tau$.

Definición 3.2 Una aplicación, $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \to (X', \varepsilon' \subset \tau')$, entre espacios exteriores se dice que es *exterior* si es continua y $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

La composición de aplicaciones exteriores es exterior y la aplicación identidad en un espacio exterior es exterior, de aquí se tiene la categoría cuyos objetos son los espacios exteriores y cuyos morfismos son las aplicaciones exteriores. Dicha categoría se denotará por **E**.

Muchas veces es más cómodo quedarse con una subfamilia representativa de ε. Si $(X, \varepsilon \subset \tau)$ es un espacio exterior y $\beta \subset \varepsilon$ se dice que β es *base exterior* de X si para cada E e-abierto, existe $B \in \beta$ tal que $B \subset E$. Por otro lado, si $\Sigma \subset \varepsilon$ se dice que Σ es *subbase exterior* de X si para cada E e-abierto existe $\{S_1, ..., S_n\} \subset \Sigma$ tal que $\cap_{i=1}^n S_i \subset E$. Es sencillo comprobar que una aplicación continua es exterior manipulando tan solo e-abiertos básicos, o bien subbásicos.

Se recuerda ahora la noción de aplicación propia.

Definición 3.3 Dada una aplicación continua entre espacios topológicos $f : X \to Y$, se dirá *propia* si $f^{-1}(K)$ es compacto para cada K, compacto-cerrado.

La categoría de los espacios topológicos y aplicaciones propias se denotará por $\mathbf{P}$. Como consecuencia se tiene que $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es una aplicación propia si y sólo si $f : (X, \varepsilon_{cc}^X \subset \tau_X) \to (Y, \varepsilon_{cc}^Y \subset \tau_Y)$ es exterior.

$\mathbf{P}$ es una subcategoría plena de $\mathbf{E}$: existe el encaje $e : \mathbf{P} \to \mathbf{E}$ que consiste en asignar a cada espacio topológico X el espacio exterior $e(X) = X_e$ provisto de la topología de X y con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados. A cada aplicación propia f se le asigna $e(f) = f_e = f$.

Se dará ahora una serie de definiciones y resultados que comprobarán que la categoría de los espacios exteriores, $\mathbf{E}$, es completa y cocompleta.

Definición 3.4 Sea $\{(X_i, \varepsilon_i \subset \tau_i)\}_{i\in I}$ una colección de espacios exteriores. Se define el *espacio exterior coproducto* como $\coprod_{i\in I} X_i$, la unión disjunta con la topología coproducto y con externología la de los subconjuntos $E \subset X$ tales que $j_k^{-1}(E) \in \varepsilon_k$ para cada $k \in I$, donde $j_k : X_k \to X$ es la inyección k-ésima. Por otro lado, se define el *espacio exterior producto* como $\prod_{i\in I} X_i$, el producto conjuntista con la topología producto, y si se denota por $p_k : \prod_{i\in I} X_i \to X_k$ la proyección k-ésima, entonces la externología es la generada por la subbase exterior cuyos elementos son de la forma $p_k^{-1}(E_k)$, $E_k \in \varepsilon_k$, $k \in I$.

Estos nuevos espacios exteriores creados son el coproducto y producto categóricos de la familia dada, respectivamente.

Todo espacio exterior induce subespacios exteriores.

Definición 3.5 Sea X espacio exterior y $A \subset X$, se define en A la externología cuyos elementos son de la forma $E \cap A$ donde E es e-abierto en X.

Nótese que la inclusión canónica $i : A \to X$ es exterior.

Definición 3.6 Sea $(X, \varepsilon \subset \tau)$ un espacio exterior, "$\sim$" una relación de equivalencia en X, $X/\sim$ el espacio topológico cociente. Si se denota por $\pi : X \to X/\sim$ la proyección canónica, se define en $X/\sim$ la externología dada por aquellos subconjuntos E tales que $\pi^{-1}(E) \in \varepsilon$.

Así, por procedimientos análogos a los hechos para los espacios topológicos, tenemos:

Proposición 3.7 *Dadas dos aplicaciones exteriores,*

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \ ,$$

existe su igualador y su coigualador.

Nota: Se hace notar que $(\emptyset, \{\emptyset\} \subset \{\emptyset\})$ es el objeto inicial en $\mathbf{E}$ y que el objeto $(*, \{*\} \subset \{\emptyset, *\})$ es final, donde $*$ representa el conjunto unipuntual.

Como consecuencia de todo lo anterior:

Teorema 3.8 $\mathbf{E}$ *es una categoría completa y cocompleta.*

3.2 Otra interpretación de la categoría $\mathbf{E}$

Un hecho especial de la categoría de los espacios exteriores es que se puede considerar como una subcategoría de $\mathbf{Top}_*$, la categoría de los espacios topológicos punteados, mediante un proceso similar a la compactificación de Alexandroff. Si $(X, \varepsilon_X \subset \tau_X)$ es un espacio exterior y $*$ un punto no perteneciente a

X se define $X_\infty = X \cup \{*\}$ con punto distinguido $*$, junto con la topología $\tau_\infty = \tau_X \cup \{E \cup \{*\} : E \in \varepsilon_X\}$. Por otro lado, si $f : X \to X'$ es una aplicación exterior, se define $f_\infty : X_\infty \to X'_\infty$ ($X_\infty = X \cup \{*\}$, $X'_\infty = X' \cup \{*'\}$) dada por $f_\infty(x) = f(x)$ si $x \in X$ y $f_\infty(*) = *'$. Esto origina un funtor $(.)_\infty : \mathbf{E} \to \mathbf{Top}_*$. Este funtor es claramente fiel.

Se considera $\mathbf{Top}_\infty$ la subcategoría de $\mathbf{Top}_*$ cuyos objetos son los espacios topológicos punteados de la forma (X, x_0) donde $\{x_0\}$ es cerrado en X. Los morfismos de esta categoría son las aplicaciones continuas punteadas $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ tales que $f^{-1}(\{y_0\}) = \{x_0\}$. Entonces

Teorema 3.9 $\mathbf{E}$ *y* $\mathbf{Top}_\infty$ *son categorías equivalentes.*

3.3 Leyes exponenciales.

Ahora se analizarán unas leyes exponenciales en $\mathbf{E}$ de carácter general y también unas consecuencias que se deducen de éstas.

Definición 3.10 Sea X un espacio exterior y $L \subset X$. Se dice que L es *e-compacto* si L-E es compacto para cada E e-abierto.

Se deduce inmediatamente que X es e-compacto si y sólo si su externología está contenida en la de los complementos de sus compacto-cerrados.

Definición 3.11 Sean X, Z espacios exteriores. Se define

$$Z^X = Hom_{\mathbf{E}}(X, Z),$$

con la topología generada por la subbase cuyos elementos son de la forma

$$(K, U) = \{\alpha \in Z^X : \alpha(K) \subset U\},$$

$$(L, E) = \{\alpha \in Z^X : \alpha(L) \subset E\},$$

donde K es compacto en X, U abierto en Z, L es e-compacto en X y E e-abierto en Z. Esta topología se denotará por τ_{Z^X}.

Proposición 3.12 *Existe un funtor,*

$$(.)^{(\cdot)} : \mathbf{E}^{op} \times \mathbf{E} \to \mathbf{Top},$$

dado por $(X, Z) \mapsto Z^X$, $(f, g) \mapsto g^f = f^* g_*$.

Definición 3.13 Sean X espacio exterior e Y espacio topológico. Se define en $X \times Y$ la topología producto y externología dada por aquellos subconjuntos abiertos de $X \times Y$, E, tales que para cada $y \in Y$ existe $U_y \in \tau_Y$, $y \in U_y$, y existe $E_y \in \varepsilon_X$ tal que $E_y \times U_y \subset E$. Este nuevo espacio exterior se denotará por $X \bar{\times} Y$.

Proposición 3.14 *Existe un funtor,*

$$\_ \bar{\times} \_ : \mathbf{E} \times \mathbf{Top} \to \mathbf{E},$$

dado por $(X, Y) \mapsto X \bar{\times} Y$, $(f, g) \mapsto f \bar{\times} g$.

Cuando el espacio topológico Y es compacto entonces $\varepsilon_{X \bar{\times} Y} = \{E \in \tau_{X \times Y} : \exists G \in \varepsilon_X, G \times Y \subset E\}$. Si además X es un espacio exterior dotado de la externología de los complementos de sus compacto-cerrados entonces la externología de $X \bar{\times} Y$ coincide con la de los complementos de sus compacto-cerrados.

Teorema 3.15 *Sean X, Z espacios exteriores, X Hausdorff, localmente compacto, con externología ε^X_{cc}, e Y espacio topológico. Entonces existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E}}(X\bar{\times}Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(Y, Z^X).$$

Definición 3.16 Sea Y un espacio topológico y Z un espacio exterior. Se define $Z^Y = Hom_{\mathbf{Top}}(Y, Z)$ provista de la topología compacto-abierta y la externología cuya base exterior está formada por los subconjuntos de Z^Y de la forma (K, E), K compacto en Y, E e-abierto en Z. Esta externología se denotará por ε_{Z^Y}.

Otra ley exponencial que se da es la siguiente:

Teorema 3.17 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E}}(X\bar{\times}Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{E}}(X, Z^Y),$$

con X,Z espacios exteriores, Y espacio topológico localmente compacto.

De las biyecciones naturales 3.15, 3.17 se deduce primeramente que, fijado un espacio exterior X Hausdorff, localmente compacto y con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, existe una situación de adjunción,

$$X\bar{\times}\_ : \mathbf{Top} \rightleftarrows \mathbf{E} : (.)^X, \quad X\bar{\times}\_ \dashv (.)^X.$$

También, fijado un espacio topológico localmente compacto Y, existe una adjunción,

$$\_\bar{\times}Y : \mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{E} : (.)^Y, \quad \_\bar{\times}Y \dashv (.)^Y.$$

3.4 Estructuras de Quillen para **E**.

Se estudiarán diferentes estructuras de modelo para homotopía en el sentido de Quillen, relacionándolas entre sí. Se considerará el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con la topología discreta y externología de los complementos de sus compacto-cerrados, es decir, de sus subconjuntos finitos. También a S^n, D^n, I, la n-esfera, el n-disco y el intervalo unidad cerrado provistos con las topologías inducidas por la usual, respectivamente.

Se considera la categoría de los espacios exteriores bajo $\mathbb{N}$, $\mathbf{E}^{\mathbb{N}}$. Los objetos $a : \mathbb{N} \to X$, que son aplicaciones exteriores, se denotarán por (X, a), mientras que los morfismos

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

por $f : (X, a) \to (Y, b)$.

Definición 3.18 Sean $f, g : (X, a) \to (Y, b)$ aplicaciones exteriores bajo $\mathbb{N}$. Se dirá que f *es e-homótopa a g relativamente a* $\mathbb{N}$, si existe una aplicación exterior $H : X\bar{\times}I \to Y$ (denominada *homotopía exterior* relativa a $\mathbb{N}$), tal que $H\delta_0 = f$, $H\delta_1 = g$ y $H(a \times id) = bp$.

Sustituyendo $\mathbb{N}$ por $\emptyset$ surge, de forma natural, la *homotopía exterior no relativa.* La relación de e-homotopía relativa a $\mathbb{N}$ es de equivalencia en $Hom_{\mathbf{E}^{\mathbb{N}}}((X, a), (Y, b))$. Además, esta relación es compatible respecto de la composición con aplicaciones exteriores bajo $\mathbb{N}$.

Dado X espacio exterior existe la biyección

$$Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}S^n, X) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(S^n, X^{\mathbb{N}}).$$

Este tipo de biyección se puede trasladar para objetos bajo $\mathbb{N}$:

$$Hom_{\mathbf{E}^{\mathbb{N}}}((\mathbb{N}\bar{\times}S^n, id \times *), (X, a)) \cong Hom_{\mathbf{Top}^*}((S^n, *), (X^{\mathbb{N}}, a)).$$

Teniendo en cuenta que $Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}(S^n \times I), X) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(S^n \times I, X^{\mathbb{N}})$ existe la biyección

$$[(\mathbb{N}\bar{\times}S^n, id \times *), (X, a)]^{\mathbb{N}} \cong [(S^n, *), (X^{\mathbb{N}}, a)],$$

donde el primer miembro de la biyección es el conjunto de las clases de e-homotopía relativa y el segundo es el conjunto de clases homotopía punteado clásico. Esto da pie a la siguiente definición:

Definición 3.19 Dado (X, a) objeto en $\mathbf{E}^{\mathbb{N}}$, se define su *n-conjunto de homotopía exterior de tipo Brown* como el conjunto

$$\pi_n^B((X, a)) = [(\mathbb{N}\bar{\times}S^n, id \times *), (X, a)]^{\mathbb{N}}.$$

Así, existe una biyección $\varphi_{(X,a)} : \pi_n^B((X, a)) \to \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a)$, de forma que induce la estructura algebraica de uno a otro. Entonces, $\pi_0^B((X, a))$ es un conjunto punteado, $\pi_1^B((X, a))$ es un grupo y $\pi_n^B((X, a))$ es un grupo abeliano, para $n \geq 2$.

También se puede considerar $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ con la topología inducida por la usual y externología de los complementos de sus compactos. De forma totalmente análoga, se tiene la categoría de los espacios exteriores bajo $\mathbb{R}_+$, $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$. Surge la noción de e-homotopía relativa a $\mathbb{R}_+$ y, observando que $\mathbb{R}_+$ es Hausdorff, localmente compacto y con la externología $\varepsilon_{cc}^{\mathbb{R}_+}$, se puede hacer el mismo razonamiento hecho para $\mathbb{N}$, dando lugar, así, a la siguiente definición:

Definición 3.20 Dado (X, a) objeto en $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$, se define su *n-conjunto de homotopía exterior de tipo Steenrod* como el conjunto

$$\pi_n^S((X, a)) = [(\mathbb{R}_+\bar{\times}S^n, id \times *), (X, a)]^{\mathbb{R}_+}.$$

Así, se tiene un conjunto punteado para $n = 0$, un grupo para $n = 1$ y un grupo abeliano para $n \geq 2$. De igual manera se tiene, dado una aplicación exterior bajo $\mathbb{R}_+$, una aplicación de conjuntos, un homomorfismo de grupos o un homomorfismo de grupos abelianos, dependiendo que la dimensión sea 0, 1 o mayor o igual que 2, respectivamente.

Definición 3.21 Sea $f : X \to Y$ una aplicación exterior. Se dice que f es *equivalencia débil exterior* o *e-equivalencia débil* si verifica una de las dos condiciones siguientes:

(i) Si $X^{\mathbb{N}} = \emptyset$ entonces $Y^{\mathbb{N}} = \emptyset$.

(ii) Si $X^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$ entonces, $\pi_n^B(f) : \pi_n^B((X, a)) \to \pi_n^B((Y, fa))$ es biyección, para cada $n \geq 0$, $a \in X^{\mathbb{N}}$.

Definición 3.22 Sea $p : E \to B$ una aplicación exterior, se dice que es una *fibración exterior*, o *e-fibración* si tiene la P.E.D. respecto de las aplicaciones $\delta_0 : \mathbb{N}\bar{\times}D^n \to \mathbb{N}\bar{\times}(D^n \times I)$, $n \geq 0$. Es decir, todo diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}\bar{\times}D^n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\delta_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{N}\bar{\times}(D^n \times I) \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}$$

tiene elevación, $h : \mathbb{N}\bar{\times}(D^n \times I) \to E$, $ph = v$, $h\delta_0 = u$.

Definición 3.23 Sea $i : A \to B$ una aplicación exterior, se dice que es *cofibración exterior* o *e-cofibración* si tiene la propiedad de elevación de homotopía a izquierda respecto de las e-fibraciones triviales.

$\mathbf{E}$, junto con la e-fibraciones, e-cofibraciones y las e-equivalencias débiles, tiene estructura de categoría de modelos cerrada. Pero además, tiene una estructura adicional, la de categoría simplicial de modelos cerrada.

Se define un funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{E}} : \mathbf{E}^{op} \times \mathbf{E} \to \mathbf{SS}$ por $\underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X,Y)_n = Hom_{\mathbf{E}}(X \bar{\times} |\Delta[n]|, Y)$.

Si $f \in \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X,Y)_n$ y $g \in \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(Y,Z)_n$, entonces $g \circ_n f$ viene determinado por la composición

$$X \bar{\times} |\Delta[n]| \xrightarrow{id_X \bar{\times} \Delta} (X \bar{\times} |\Delta[n]|) \bar{\times} |\Delta[n]| \xrightarrow{f \bar{\times} id_{|\Delta[n]|}} Y \bar{\times} |\Delta[n]| \xrightarrow{g} Z.$$

$\circ$ define una aplicación simplicial para cada terna de espacios exteriores X, Y, Z. Se tiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 3.24 $\mathbf{E}$ *con la estructura definida anteriormente es una categoría simplicial.*

Definición 3.25 Sea X un espacio exterior y sea K un conjunto simplicial finito. Se define $X \otimes K = X \bar{\times} |K|$ y $X^K = X^{|K|}$.

Nótese que, en este caso, $|K|$ es un espacio topológico compacto y Hausdorff.

Teorema 3.26 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X,Y)),$$

donde X, Y son espacios exteriores y K un conjunto simplicial finito.

Proposición 3.27 *Sean X un espacio exterior y K, L conjuntos simpliciales finitos, entonces,*
(i) $X \otimes (K \times L) \cong (X \otimes K) \otimes L$,
(ii) $X^{K \times L} \cong (X^K)^L$.

También se tiene:
$Hom_{\mathbf{E}}(Y, X^K) \cong Hom_{\mathbf{E}}(Y \otimes K, X) \cong Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(Y,X))$. Así, $\mathbf{E}$ verifica el axioma SM0.
Se tiene que $Hom_{\mathbf{E}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\mathbf{E}}(X, Y^K)$. Esto se puede generalizar a nivel simplicial.

Teorema 3.28 $\mathbf{E}$ *tiene estructura de categoría simplicial de modelos cerrada.*

Se definirá ahora una nueva estructura en $\mathbf{E}$. Existe un funtor de olvido $U : \mathbf{E} \to \mathbf{Top}$ de forma que prescinde de la externología de cada espacio exterior y a cada aplicación exterior se le asigna la misma aplicación entre los espacios topológicos correspondientes. Siempre que no haya lugar a ambigüedad o confusión se denotará al olvido de $f : X \to Y$ como el mismo $f : X \to Y$.

Existe otro funtor, $V : \mathbf{Top} \to \mathbf{E}$ que a cada espacio topológico lo transforma en un espacio exterior sin más que considerar como externología la propia topología. U es adjunto a derecha de V.

Definición 3.29 Sea $f : X \to Y$ una aplicación exterior. Se dice que f es *g-equivalencia débil* si es e-equivalencia débil y su olvido es equivalencia débil en $\mathbf{Top}$.

Se observa que toda equivalencia de homotopía exterior es una g-equivalencia débil.

Definición 3.30 Sea $p : E \to B$ una aplicación exterior. Se dice que es *g-fibración* si es e-fibración y su olvido es fibración en $\mathbf{Top}$.

Decir que el olvido de p es fibración en **Top** es lo mismo que decir que p, como aplicación exterior, tiene la P.E.D. en **E** respecto de las aplicaciones exteriores $\delta_0 : D^q \to D^q \bar{\times} I$, donde en D^q se considera la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, es decir, la propia topología; por tanto en $D^q \bar{\times} I$ se tiene también la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, o la propia topología. Asimismo, toda aplicación $u : D^q \to X$ es exterior si y sólo si su olvido es continua, al igual con aplicaciones del tipo $D^q \times I \to X$.

Definición 3.31 Sea $i : A \to B$ una aplicación exterior, se dice que es *g-cofibración* si verifica la P.E.I. respecto de las g-fibraciones triviales.

Se deduce que todo espacio exterior es g-fibrante. Además, tanto el coproducto de g-cofibraciones como la inducida en un push-out de una g-cofibración es de nuevo una g-cofibración.

Teorema 3.32 **E** *junto con las g-fibraciones, g-cofibraciones y las g-equivalencias débiles es una categoría simplicial de modelos cerrada.*

La definición de gCW complejo surge como un espacio exterior en el que se pegan adecuadamente celdas compactas y no compactas. Se dará ahora su definición rigurosa y se verán algunas de sus propiedades más importantes, así como un teorema de tipo Whitehead.

Definición 3.33 Sea X un espacio exterior, se dice que es un *gCW complejo* si admite una filtración

$$\emptyset = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset ... \subset X^n \subset ... \subset X,$$

tal que X es el colímite de dicha sucesión y cada X^n se obtiene de X^{n-1} mediante un push-out en **E** de la forma

$$\begin{array}{ccc} (\coprod_{\lambda\in A_n} \mathbb{N}\bar{\times}S^{n-1}_\lambda)\coprod(\coprod_{\mu\in B_n} S^{n-1}_\mu) & \xrightarrow{(\coprod_{\lambda\in A_n}\varphi_\lambda)\coprod(\coprod_{\mu\in B_n}\varphi_\mu)} & X_{n-1} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (\coprod_{\lambda\in A_n} \mathbb{N}\bar{\times}D^{n}_\lambda)\coprod(\coprod_{\mu\in B_n} D^{n}_\mu) & \xrightarrow[(\coprod_{\lambda\in A_n}\psi_\lambda)\coprod(\coprod_{\mu\in B_n}\psi_\mu)]{} & X_n. \end{array}$$

A $\psi_\lambda(\mathbb{N}\bar{\times}D^n_\lambda)$, $\psi_\mu(D^n_\mu)$ se les denomina $\mathbb{N}$-*celda* y *celda simple* respectivamente, y a las aplicaciones $\varphi_\lambda : \mathbb{N}\bar{\times}S^{n-1}_\lambda \to X^{n-1}$, $\varphi_\mu : S^{n-1}_\mu \to X^{n-1}$ las aplicaciones *característica* respectivas.

Se llama *q-esqueleto* de X al elemento q-ésimo de la filtración que admite X, X^q.

Proposición 3.34 *Todo gCW complejo es un espacio exterior g-cofibrante.*

Se obtiene como consecuencia el teorema de Whitehead.

Teorema 3.35 *Sea $f : X \to Y$ aplicación exterior entre gCW complejos. Entonces f es una equivalencia de homotopía exterior si y sólo si f es g-equivalencia débil.*

Todo CW complejo es un gCW complejo con externología la propia topología. Esta externología no tiene por qué coincidir con la de los complementos de los compacto-cerrados, sin embargo bajo ciertas condiciones sí se cumple.

Proposición 3.36 *Sea X un CW complejo localmente finito, de dimensión finita y con un número contable de celdas en cada dimensión. Entonces X, con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, es un gCW complejo.*

Como consecuencia se obtiene el teorema de Whitehead propio.

Teorema 3.37 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación propia entre CW complejos localmente finitos, de dimensión finita y con un número contable de celdas en cada dimensión. Entonces $f = f_e$ es g-equivalencia débil si y sólo si f es una equivalencia de homotopía propia.*

3.5 Comparación de estructuras de modelos.

En esta sección se compararán las estructuras de categorías de modelos existentes en **E**: la e-estructura, la g-estructura, así como también la de los espacios topológicos.

Como se ha visto, la categoría de los espacios exteriores tiene una estructura de categoría simplicial de modelos cerrada con las e-fibraciones, e-cofibraciones y las e-equivalencias, y otra con las g-fibraciones, g-cofibraciones y g-equivalencias débiles. Cabe preguntarse qué ocurre con las categorías localizadas respectivas. Se denotará por $\mathbf{Ho_e}(\mathbf{E})$ a la categoría localizada de **E** con la estructura de modelos derivada de las e-fibraciones, e-cofibraciones y e-equivalencias débiles. Similarmente se denotará por $\mathbf{Ho_g}(\mathbf{E})$ a la localizada de **E** con la estructura derivada por los g-morfismos respectivos. Obsérvese que, de forma obvia, existe una adjunción,

$$\mathbf{E} \underset{id}{\overset{id}{\rightleftarrows}} \mathbf{E}\,.$$

Evidentemente $id : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lleva g-fibraciones en e-fibraciones y g-equivalencias débiles en e-equivalencias débiles, por lo que lleva e-cofibraciones en g-cofibraciones.

Proposición 3.38 *Existe una adjunción,*

$$\underline{\underline{L}}(id) : \mathbf{Ho_e}(\mathbf{E}) \rightleftarrows \mathbf{Ho_g}(\mathbf{E}) : \underline{\underline{R}}(id).$$

Nota: $\underline{\underline{L}}(F)$ y $\underline{\underline{R}}(F)$ denotan los funtores adjuntos a izquierda y a derecha de F respectivamente, véase [31].

Además

Proposición 3.39 *El funtor* $\underline{\underline{L}}(id) : \mathbf{Ho_e}(\mathbf{E}) \hookrightarrow \mathbf{Ho_g}(\mathbf{E})$ *es un encaje.*

Otra comparación de especial interés es entre las categorías localizadas de **Top** con la estructura de Quillen y la localizada $\mathbf{Ho_g}(\mathbf{E})$. El funtor olvido $U : \mathbf{E} \to \mathbf{Top}$ transforma g-fibraciones en fibraciones y g-equivalencias débiles en equivalencias débiles. Recordemos que su funtor adjunto a izquierda es $V : \mathbf{Top} \to \mathbf{E}$, en el que a cada espacio topológico se le considera como externología su topología.

Proposición 3.40 *Existe una adjunción,*

$$\underline{\underline{L}}(V) : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \rightleftarrows \mathbf{Ho_g}(\mathbf{E}) : \underline{\underline{R}}(U).$$

Además,

Proposición 3.41 *El funtor* $\underline{\underline{L}}(V) : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \hookrightarrow \mathbf{Ho_g}(\mathbf{E})$ *es un encaje.*

4 Modelos simpliciales.

Se presentan dos modelos algebraicos para la categoría de los espacios exteriores: los M-conjuntos simpliciales y los conjuntos simpliciales exteriores. Se establece una estructura de categoría simplicial de modelos cerrada para el primer modelo así como la creación de funtores adjuntos, realización y singular exteriores, que inducen otra adjunción en las categorías localizadas respectivas.

Se extenderá la noción de exterior a otras categorías, entre ellas, el segundo modelo. Otras son los grupos abelianos simpliciales exteriores y conjuntos (grupos abelianos) exteriores. La relación de este otro modelo con **E** es la existencia de una adjunción a través de funtores análogos a la realización geométrica y el singular clásicos.

Definición 4.1 Un *monoide* es un conjunto M con una ley de composición interna $\cdot : M \times M \to M$ verificando

(i) $m \cdot (m' \cdot m'') = (m \cdot m') \cdot m''$, para cualquier m, m', m'' de M. (Ley asociativa).

(ii) Existe $1 \in M$ tal que $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$, para cualquier m de M. (Existencia de elemento neutro).

Todo monoide M se puede considerar como una categoría con un solo objeto $*$, donde los morfismos $* \to *$ son los elementos de M, siendo la composición la operación. Recíprocamente, toda categoría con un único objeto tiene estructura de monoide considerando sus morfismos y como operación su composición.

Definición 4.2 Sea M un monoide, un *M-conjunto a derecha* es un par (X, θ), donde X es un conjunto y θ representa una acción de M por la derecha de X, esto es, una aplicación $\theta : X \times M \to X$ tal que

(i) $\theta(\theta(x, m), m') = \theta(x, m \cdot m')$, para cada x de X y m, m' de M;

(ii) $\theta(x, 1) = x$, para cada x de X.

Para simplificar notación, $\theta(x, m)$ se suele representar por $x \cdot m$ y al par (X, θ) por X.

Definición 4.3 Si X, Y son M-conjuntos por la derecha, una *M-aplicación a derecha* de X a Y consiste en una aplicación $f : X \to Y$ que respeta las acciones, es decir, $f(x \cdot m) = f(x) \cdot m$, para x de X y m de M.

La composición de M-aplicaciones por la derecha es M-aplicación por la derecha y la identidad en un M-conjunto es M-aplicación por la derecha. Surge entonces la categoría de M-conjuntos por la derecha, denotada por $\mathbf{Sets_M}$. También existe la noción de M-conjunto y M-aplicación por la izquierda, dando lugar, de forma natural, a la categoría de M-conjuntos a izquierda, $\mathbf{{}_MSets}$. A partir de aquí, cuando se haga referencia a M-conjuntos y M-aplicaciones se entenderá que son por la derecha.

Considerando a M como categoría se puede hablar de la categoría de funtores, $\mathbf{Sets^{M^{op}}}$. Se tiene que $\mathbf{Sets_M}$ y $\mathbf{Sets^{M^{op}}}$ son categorías isomorfas.

Dada una categoría cualquiera $\mathbf{C}$, se ha hablado de la categoría de objetos simpliciales de $\mathbf{C}$ como la categoría de funtores $\mathbf{C^{\Delta^{op}}}$ donde $\mathbf{\Delta}$ es la categoría simplicial. En este caso, la categoría de M-conjuntos simpliciales es $(\mathbf{Sets_M})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \cong (\mathbf{Sets^{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \cong \mathbf{Sets^{\Delta^{op} \times M^{op}}} = \mathbf{Sets^{(\Delta \times M)^{op}}}$. Todas estas reformulaciones se pueden usar indistintamente para designar a la categoría de los M-conjuntos simpliciales.

De forma natural surge el funtor olvido $U : \mathbf{Sets_M} \to \mathbf{Sets}$, también considerado como $U : \mathbf{Sets^{M^{op}}} \to \mathbf{Sets}$, $U(X) = X(*)$, olvidando la acción del monoide. Este funtor se extiende simplicialmente, olvidando nivel a nivel la acción del monoide en los conjuntos, a $U^{\Delta^{op}} : (\mathbf{Sets^{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \to \mathbf{Sets^{\Delta^{op}}}$, que se denota como U.

Mediante este funtor olvido, U, se obtienen los siguientes morfismos especiales:

Definición 4.4 Sea $f : X \to Y$ una M-aplicación simplicial, entonces

(i) f es una *fibración*, si $U(f)$ es fibración en $\mathbf{Sets^{\Delta^{op}}}$;

(ii) f es una *equivalencia débil*, si $U(f)$ es equivalencia débil en $\mathbf{Sets^{\Delta^{op}}}$;

(iii) f es *cofibración*, si tiene la P.E.I. respecto de las fibraciones triviales.

Teorema 4.5 *La categoría de M-conjuntos simpliciales,* $\mathbf{Sets^{(\Delta \times M)^{op}}}$, *junto con las fibraciones, cofibraciones y equivalencia débiles definidas anteriormente, tiene estructura de categoría de modelos cerrada.*

$(\mathbf{Sets^{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}$ es una categoría simplicial al ser de objetos simpliciales ([31]). Además, se verifican los axiomas **SM0** y **SM7**. De la cocompletitud de $\mathbf{Sets^{M^{op}}}$, dado X un M-conjunto simplicial y K un conjunto simplicial:

Definición 4.6 El M-conjunto simplicial $X \otimes K$ viene dado como

$$(X \otimes K)_n = \coprod_{\tau \in K_n} X_n,$$

y si $j_\sigma : X_n \to \coprod_{\tau \in K_n} X_n$ denota a la inclusión σ-ésima, $\sigma \in K_n$.

Existe, además, un isomorfismo canónico: $X \otimes (K \times L) \cong (X \otimes K) \otimes L$.

Definición 4.7 Dado X un M-conjunto simplicial, K un conjunto simplicial, se define X^K como

$$(X^K)_n = Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(K \times \Delta[n], U(X)).$$

Se obtiene entonces:

Proposición 4.8 *Si X, Y son M-conjuntos simpliciales y K un conjunto simplicial, existe una biyección natural, $Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(X, Y^K)$.*

Como consecuencia, si X es un M-conjunto simplicial y K, L son conjuntos simpliciales entonces $X^{K \times L} \cong (X^K)^L$.

Teorema 4.9 $\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta} \times \mathbf{M})^{\mathbf{op}}}$ *es una categoría simplicial de modelos cerrada.*

4.2 Funtores singular y realización geométrica exteriores.

Se construirán ahora unos funtores adjuntos de una categoría en la otra, llamados *singular exterior* y *realización geométrica exterior*, que inducen una adjunción en las categorías localizadas respectivas.

Se considera el monoide concreto $M = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, donde en $\mathbb{N}$ se toma la topología discreta y externología de los complementos de sus subconjuntos finitos. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se considera el n-símplice standard geométrico Δ_n. Si $\varphi : [n] \to [m]$ es creciente entonces se induce una aplicación continua denotada como $\tilde{\varphi} : \Delta_n \to \Delta_m$ que da origen a un funtor $\mathbf{\Delta} \to \mathbf{Top}$.

Definición 4.10 Se define el *funtor singular exterior*, $Sing_e : \mathbf{E} \to \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta} \times \mathbf{M})^{\mathbf{op}}}$, como $Sing_e(X)_n = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N} \bar{\times} \Delta_n, X)$.

Teorema 4.11 *Existe un funtor $|.|_e : \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta} \times \mathbf{M})^{\mathbf{op}}} \to \mathbf{E}$, llamado realización geométrica exterior, tal que es adjunto a izquierda del funtor singular exterior. Además, e ste funtor viene definido por*

$$|X|_e = colim\ (\int_{\mathbf{\Delta} \times \mathbf{M}} X \overset{\pi_X}{\to} \mathbf{\Delta} \times \mathbf{M} \overset{A}{\to} \mathbf{E}),$$

para cada M-conjunto simplicial X.

Estos funtores inducen unos funtores adjuntos en las categorías localizadas respectivas:

Teorema 4.12 *Existe una adjunción, $\underline{\underline{L}}(|.|_e) \dashv \underline{\underline{R}}(Sing_e)$,*

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta} \times \mathbf{M})^{\mathbf{op}}}) \underset{\underline{\underline{R}}(Sing_e)}{\overset{\underline{\underline{L}}(|.|_e)}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ho_e}(\mathbf{E}).$$

4.3 Prismas infinitos.

Se define, para cada M-conjunto simplicial, un conjunto simplicial especial, denominado *prismas infinitos*. En ciertos casos será de Kan, por lo que se podrán definir directamente sus grupos de homotopía. Se ven propiedades muy interesantes, entre éstas la relación de los grupos de homotopía exterior de tipo Steenrod con los grupos de homotopía de los prismas infinitos de un determinado M-conjunto simplicial. Para X, M-conjunto simplicial, se considera $X^{\Delta[1]}$ y $d_0, d_1 : X^{\Delta[1]} \to X$. Cada d_ε es tal que $(d_\varepsilon)_n : (X^{\Delta[1]})_n \to X_n, \quad \alpha \rightsquigarrow \alpha_n(\sigma_\varepsilon, id_{[n]})$, donde $\sigma_\varepsilon : [n] \to [1]$ es tal que $\sigma_\varepsilon(t) = \varepsilon$, $t \in [n]$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

También se tiene a $s : X \to X^{\Delta[1]} : s_n : X_n \to (X^{\Delta[1]})_n;\;\; (s_n(x))_m(k, \sigma) = X(\sigma)(x)$.

Existe un elemento especial del monoide $M = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Definición 4.13 El elemento $sh : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $sh(k) = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, se denomina *operador shift.*

Si X es un M-conjunto simplicial se puede definir una aplicación simplicial $(sh)^* : X \to X$, dada por $(sh)^*_n(x) = x \cdot sh$, $x \in X_n$. Sin embargo, no es M-aplicación simplicial.

Definición 4.14 Sea X un M-conjunto simplicial, se define *los prismas infinitos* de X, y se denotará por $Prinf(X)$, al conjunto simplicial pull-back

$$\begin{tikzcd} Prinf(X) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X^{\Delta[1]} \arrow[d, "(d_0,d_1)"] \\ X \arrow[r, "(id_X,(sh)^*)"'] & X \times X. \end{tikzcd}$$

Nótese que el pull-back es en $\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}$. Por otro lado $Prinf(X)$ tiene la descripción explícita:

$$\begin{aligned} &Prinf(X)_n = \{a \in (X^{\Delta[1]})_n : (d_1)_n(a) = (d_0)_n(a) \cdot sh\}, \\ &Prinf(X)(\varphi) = X^{\Delta[1]}(\varphi)|Prinf(X)_n. \end{aligned}$$

Además, $p_1 : Prinf(X) \hookrightarrow X^{\Delta[1]}$ es la inclusión canónica y p_2 es $d_0|Prinf(X) : Prinf(X) \to X$. Se induce de forma natural un funtor $Prinf : \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathbf{op}}} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}$.

Los funtores $USing_e, Sing(.)^{\mathbb{N}} : \mathbf{E} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}$ son naturalmente isomorfos. Como consecuencia inmediata se obtiene una relación entre los grupos de homotopía de tipo Brown y los grupos de homotopía de un determinado conjunto simplicial punteado.

Teorema 4.15 *Sea Z un espacio exterior y $a \in Z^{\mathbb{N}}$. Entonces el n-grupo de homotopía de tipo Brown de (Z, a) es isomorfo al n-grupo de homotopía del conjunto simplicial punteado $(U(Sing_e(Z)), a')$ donde $a' : \mathbb{N}\bar{\times}\Delta_0 \to Z$ es isomorfo a a.*

Para el caso de los grupos de homotopía de tipo Steenrod, $\pi^S_n((Z, a))$, con $a \in Z^{\mathbb{R}_+}$, existe una relación directa con el funtor prismas infinitos dando lugar al siguiente resultado.

Teorema 4.16 *Sea Z espacio exterior y $a \in Z^{\mathbb{R}_+}$. Entonces los grupos de homotopía de tipo Steenrod de (Z, a) son isomorfos a los grupos de homotopía del conjunto simplicial punteado $(Prinf(Sing_e(Z), \bar{a})$, donde $\bar{a}$ se corresponde con a de modo canónico.*

4.4 Conjuntos simpliciales exteriores.

Se introduce ahora otro modelo algebraico para $\mathbf{E}$: la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores. Esta nueva categoría, a pesar de no ser de objetos simpliciales, tiene una estructura de categoría simplicial y además dispone de unos objetos $X \otimes K$, X^K, en el sentido simplicial de Quillen. De esta manera se podrá hablar de homotopía y categoría homotópica.

Definición 4.17 Un *conjunto simplicial exterior* consiste en un par (X,ε), donde X es un conjunto simplicial y ε es una familia no vacía de subconjuntos simpliciales de X, llamada *externología*, verificando

(i) Si Z_1, $Z_2 \in \varepsilon$ entonces $Z_1 \cap Z_2 \in \varepsilon$;

(ii) Si $Z \in \varepsilon$, $W \subset X$ y $Z \subset W$ entonces $W \in \varepsilon$.

De forma totalmente análoga, se pueden considerar para los conjuntos simpliciales exteriores, bases y subbases exteriores.

Definición 4.18 Una *aplicación simplicial exterior* es una aplicación simplicial entre conjuntos simpliciales exteriores, $f:(X,\varepsilon)\to(X',\varepsilon')$, tal que $f^{-1}(E)\in\varepsilon$, para cada $E\in\varepsilon'$.

Si no hay peligro de confusión, a las aplicaciones simpliciales exteriores se las denotará por $f:X\to X'$, omitiendo las externologías. También, se denota a la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores por $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}}$.

Definición 4.19 Sea (X,ε) un conjunto simplicial exterior y $A\subset X$ un subconjunto simplicial. Se define $\varepsilon_A=\{E\cap A : E\in\varepsilon\}$.

Es externología en A, dotándola así de estructura de conjunto simplicial exterior y haciendo que la inclusión canónica $i:A\hookrightarrow$ sea una aplicación simplicial exterior. Sea ahora (X,ε) un conjunto simplicial exterior, de forma que en cada X_n existe una relación de equivalencia compatible, es decir, $x\sim x'$ si y sólo si $X(\varphi)(x)\sim X(\varphi)(x')$, para cada φ de $\mathbf{\Delta}$, con codominio $[n]$. Se considera $(X/\sim)_n = X_n/\sim$ y $(X/\sim)(\varphi)=\bar{\varphi}$ la inducida en las proyecciones. $X/\sim$ es el conjunto simplicial *cociente*. Se tiene también la proyección $\pi:X\to X/\!\sim$, $\pi_n(x)=[x]$, $x\in X_n$. Evidentemente es simplicial, y la externología $\varepsilon_{X/\sim}=\{E\subset X/\!\sim : \pi^{-1}(E)\in\varepsilon\}$ dota a $X/\!\sim$ de estructura de conjunto simplicial exterior. Se denomina *conjunto simplicial exterior cociente.*

Por otro lado, si $\{(X^i,\varepsilon^i)\}_{i\in I}$ una colección de conjuntos simpliciales exteriores, por un lado se considera $\coprod_{i\in I}X^i$ el conjunto simplicial coproducto, dado por $(\coprod_{i\in I}X^i)_n=\coprod_{i\in I}X^i_n$, y si $j_k:X^k\hookrightarrow \coprod_{i\in I}X^i$ representa la inyección k-ésima, $k\in I$, entonces se define la externología $\varepsilon_{(\coprod_{i\in I}X^i)}=\{E\subset \coprod_{i\in I}X^i : j_k^{-1}(E)\in\varepsilon^k, \forall k\in I\}$, haciendo a cada j_k exterior. $\coprod_{i\in I}X^i$ con la estructura exterior es el coproducto categórico de la familia dada. Por otro lado, si se considera el conjunto simplicial producto $\prod_{i\in I}X^i$ y se denota por $p_k:\prod_{i\in I}X^i\to X^k$, la proyección k-ésima, se define la externología generada por $S=\{p_k^{-1}(E_k) : E_k\in\varepsilon^k, k\in I\}$. $\prod_{i\in I}X^i$ es el producto categórico de la familia dada en $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}}$.

Por otro lado, dadas $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$, aplicaciones simpliciales exteriores, existe su igualador y coigualador.

Si $\emptyset$ representa el conjunto simplicial vacío, y $*$ el conjunto simplicial unipuntual, entonces $(\emptyset,\{\emptyset\})$ y $(*,\{*\})$ son los objetos inicial y final de esta categoría, respectivamente. Se deduce inmediatamente que $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}}$ es una categoría completa y cocompleta.

Otra propiedad interesante de esta categoría es que es simplicial. En primer lugar se introduce el tensor $X\otimes K$, cuando X es un conjunto simplicial exterior y K es un conjunto simplicial, noción que dará pie a la creación del funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}$.

Definición 4.20 Sea (X,ε) un conjunto simplicial exterior, K conjunto simplicial. Se define el conjunto simplicial exterior $(X\otimes K,\varepsilon_{X\otimes K})$ como sigue: $X\otimes K = X\times K$, donde representa el producto cartesiano en conjuntos simpliciales, olvidándose de la estructura exterior de X. Los elementos de $\varepsilon_{X\otimes K}$ son los subconjuntos de $X\times K$, E, tales que para cada $p\geq 0$, y para cada $\sigma\in K_p$, existe $F^\sigma\in\varepsilon$ y existe $G^\sigma\subset K$ con $\sigma\in G^\sigma_p$ y $F^\sigma\times G^\sigma\subset E$.

Proposición 4.21 *Sea X un conjunto simplicial exterior y K, L conjuntos simpliciales finitos. Entonces* $(X\otimes K)\otimes L = X\otimes(K\times L)$.

Definición 4.22 Sean X, Y conjuntos simpliciales exteriores. Se define

$$\underline{Hom}_{\textbf{E-Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(X,Y)_p = Hom_{\textbf{E-Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(X \otimes \Delta[p], Y), \ \ p \geq 0.$$

Definición 4.23 Se define $g \circ_p f$ como la composición

$$X \otimes \Delta[p] \xrightarrow{id_X \otimes \Delta} X \otimes (\Delta[p] \times \Delta[p]) \xrightarrow{f \otimes id_{\Delta[p]}} Y \otimes \Delta[p] \xrightarrow{g} Z,$$

para cada $f \in \underline{Hom}_{\textbf{E-Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(X,Y)_p$ y $g \in \underline{Hom}_{\textbf{E-Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(Y,Z)_p$.

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.24 $\textbf{E-Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}$ *es una categoría simplicial.*

Si se tiene en cuenta:

Proposición 4.25 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\textbf{E-Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\textbf{Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(K, \underline{Hom}_{\textbf{E-Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(X,Y)).$$

Entonces $X \otimes K$ es el objeto tensor en el sentido simplicial de Quillen. También existe la exponenciación.

Definición 4.26 Sea X un conjunto simplicial exterior, K un conjunto simplicial. Se define X^K como $(X^K)_p = Hom_{\textbf{Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(K \times \Delta[p], X), \ \ p \geq 0 \ \ (X \equiv U(X))$, donde

$$\varepsilon_{X^K} = \{E \subset X^K : \exists F \in \varepsilon_X \text{ tal que } F^K \subset E\}.$$

Esta construcción dota a X^K de estructura de conjunto simplicial exterior.

Los funtores $\_ \otimes \_$ y $(.)^{(.)}$ están relacionados mediante una biyección natural, hecho crucial para comprobar que X^K es la exponenciación del sentido simplicial de Quillen.

Proposición 4.27 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\textbf{E-Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\textbf{E-Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(X, Y^K),$$

donde X, Y recorren los conjuntos simpliciales exteriores y K los conjuntos simpliciales finitos.

La biyección natural de la proposición anterior tiene una generalización simplicial.

4.5 Los funtores E-Sing y E-|.|.

Ahora se dará una definición de un funtor *E-Sing*, estilo funtor singular, de la categoría de los espacios exteriores a la de conjuntos simpliciales exteriores.

Definición 4.28 Si (X, ε_X) es un espacio exterior, se define

$$(E\text{-}Sing)((X, \varepsilon_X)),$$

como el conjunto simplicial $Sing(X)$ junto con la externología que admite como base exterior los subconjuntos simpliciales de la forma $Sing(E)$, con $E \in \varepsilon_X$.

Se induce un funtor $E\text{-}Sing : \mathbf{E} \to \textbf{E-Sets}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{op}}}$.

Definición 4.29 Sea (X, ε_X) un conjunto simplicial exterior. Se define E-$|(X, \varepsilon_X)|$, como el espacio exterior dado por el espacio topológico $|X|$, realización geométrica de X considerado como conjunto simplicial, junto con la externología formada por los abiertos de $|X|$ que contienen a la realización geométrica de algún subconjunto simplicial exterior de X.

Si no hay lugar a confusión se denota como E-$|X|$. Se tiene un funtor E-$|.| : \mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}} \to \mathbf{E}$. Estos funtores construidos, E-*Sing* y E-$|.|$, están relacionados por una adjunción, la cual viene inducida por la adjunción clásica entre espacios topológicos y conjuntos simpliciales.

Proposición 4.30 *Sea X un conjunto simplicial exterior, Y un espacio exterior y $f : E\text{-}|X| \to Y$ una aplicación exterior. Entonces se induce, de forma natural, $\tilde{f} : X \to (E\text{-}Sing)(Y)$ una aplicación simplicial exterior.*

Se tiene así,

Teorema 4.31 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E}}(E\text{-}|X|, Y) \cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(X, (E\text{-}Sing)(Y)),$$

donde X recorre los conjuntos simpliciales exteriores, Y los expacios exteriores.

Siguiendo ideas paralelas a las de la categoría de los espacios exteriores, $\mathbf{E}$, y la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores, $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}$, surgen nuevas categorías. En concreto, *los conjuntos exteriores*, cuya categoría de objetos simpliciales asociada está relacionada con la de los conjuntos simpliciales exteriores a través de un funtor fiel.

Definición 4.32 Un *conjunto exterior* es un par (X, ε), donde X es un conjunto y ε es una familia no vacía de subconjuntos de X tal que
(i) Si E_1, $E_2 \in \varepsilon$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;
(ii) Si $E \in \varepsilon$, $F \subset X$ y $E \subset F$ entonces $F \in \varepsilon$.

Definición 4.33 Una *aplicación exterior* entre dos conjuntos exteriores (X, ε), (X', ε') consiste en una aplicación $f : X \to X'$ tal que $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

De estas nociones surge la categoría de conjuntos exteriores **E-Sets**. Esta categoría también tiene propiedades buenas sobre límites y colímites. Dada $\{(X_i, \varepsilon_i)\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos exteriores, si se denota por $j_k : X_k \to \coprod_{i \in I} X_i$ la inclusión k-ésima del coproducto en **Sets**, se considera en $\{(X_i, \varepsilon_i)\}_{i \in I}$ la externología constituida por aquellos subconjuntos, E, tales que $j_k^{-1}(E) \in \varepsilon_k$, para cada $k \in I$. Por otro lado, si $p_k : \prod_{i \in I} X_i \to X_k$ representa la proyección k-ésima en **Sets**, se considera en $\prod_{i \in I} X_i$ la externología que admite como base exterior los subconjuntos de la forma $p_k^{-1}(E_k)$, $E_k \in \varepsilon_k$, $k \in I$. Es inmediato que son producto y coproducto categóricos en **E-Sets** de la familia considerada.

Dadas f, g aplicaciones exteriores de X a Y se considera

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\},$$

con la externología inducida por la de X, es decir, sus subconjuntos exteriores son de la forma $E \cap A$, con $E \in \varepsilon_X$. Entonces $i : A \hookrightarrow X$, la inclusión canónica, es el igualador de f y g. Si se considera en Y el conjunto cociente $Y/\!\sim$, con las relaciones elementales $f(x) \sim g(x)$, $x \in X$, y externología formada por aquellos subconjuntos E tales que $\pi^{-1}(E)$ es subconjunto exterior de Y, donde $\pi : Y \to Y/\!\sim$ es la proyección, entonces π es el coigualador de f y g. De esta manera, se prueba que la categoría de conjuntos exteriores, **E-Sets**, es completa y cocompleta. Nótese que $(\emptyset, \{\emptyset\})$ y $(*, \{*\})$ son el objeto inicial y final respectivamente.

Al ser $(\textbf{E-Sets})^{\mathbf{\Delta^{op}}}$ una categoría de objetos simpliciales, entonces es una categoría simplicial. Como **E-Sets** es cerrada bajo coproductos dado un conjunto exterior simplicial $X : \mathbf{\Delta^{op}} \to \textbf{E-Sets}$, y K un conjunto simplicial, existe el conjunto exterior simplicial $X \otimes K$, que viene dado por $(X \otimes K)_n = \coprod_{\tau \in K_n} X_n,\ \ n \geq 0$.

La categoría de conjuntos simpliciales exteriores y la categoría de conjuntos exteriores simpliciales están relacionadas mediante un funtor fiel,

$$W : \textbf{E-Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}} \to (\textbf{E-Sets})^{\mathbf{\Delta^{op}}},$$

que conserva el tensor $\_ \otimes \_$ restringido a conjuntos simpliciales con un número finito de símplices en cada dimensión. Este funtor viene definido como $W((X, \varepsilon))_n = (X_n, \varepsilon_n)$, donde ε_n es la externología que admite como base exterior a $\{E_n : E \in \varepsilon\}$. Como consecuencia inmediata, este funtor W preserva los cilindros, es decir,

$$W(X \otimes \Delta[1]) = W(X) \otimes \Delta[1].$$

4.6 Grupos abelianos simpliciales exteriores.

Como se ha comentado, la noción *exterior* se puede trasladar a otras categorías. En paralelismo a la sección anterior, en el apartado concerniente a los conjuntos simpliciales exteriores y conjuntos exterio res simpliciales, surgen los *grupos abelianos simpliciales exteriores* (noción exterior de grupo abeliano simplicial), y los *grupos abelianos exteriores simpliciales* (categoría de objetos simpliciales de la categoría exterior de grupos abelianos). Estas nuevas categorías sirven de puente para el desarrollo de homologías en espacios exteriores.

Se comienza con la presentación de la categoría de los *grupos abelianos simpliciales exteriores.* Dado un grupo abeliano simplicial, se consideramos subgrupos simpliciales $H < G$.

Definición 4.34 Un *grupo abeliano simplicial exterior* consiste en un par (G, ε), donde G es un grupo abeliano simplicial y ε es una familia no vacía de subgrupos simpliciales de G verificando:
(i) Si $E_1, E_2 \in \varepsilon$ entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;
(ii) Si $E \in \varepsilon$, $F < G$ y $E < F$ entonces $F \in \varepsilon$.

Nota: Al igual que en conjuntos simpliciales exteriores se establecen, de forma obvia, las nociones de base y subbase exterior.

Definición 4.35 Un homomorfismo simplicial entre grupos abelianos simpliciales exteriores $f : (G, \varepsilon) \to (G', \varepsilon')$ se dice que es *exterior* si $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

Se tiene entonces, una nueva categoría, la de los grupos abelianos simpliciales exteriores, $\textbf{E-Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}$. También esta categoría es completa y cocompleta. Además es punteada.

Si A es un subgrupo simplicial de G, con G simplicial exterior, se induce en A la externología ε_A cuya base exterior está formada por los subgrupos de A de la forma $E \cap A$, $E \in \varepsilon$. Así, la inclusión $i : A \hookrightarrow G$ es homomorfismo simplicial exterior. Por otro lado se puede definir el grupo simplicial cociente G/A por $(G/A)_p = G_p/A_p$, $p \geq 0$; teniendo el homomorfismo simplicial proyección $\pi : G \to G/A$, se define

$$\varepsilon_{G/A} = \{E < G/A : \pi^{-1}(E) \in \varepsilon\},$$

haciendo a π simplicial exterior.

Por otro lado, si $\{(G^i,\varepsilon_i)\}_{i\in I}$ es una familia de grupos abelianos simpliciales exteriores, se considera $\oplus_{i\in I}G^i$, dada por $(\oplus_{i\in I}G^i)_p = \oplus_{i\in I}G^i_p$, $p \geq 0$; y la inyección $j_k : G^k \to \oplus_{i\in I}G^i$, para cada $k \in I$. Se consideran los subgrupos simpliciales $E < \oplus_{i\in I}G^i$ tales que $j_k^{-1}(E) \in \varepsilon_k$, $\forall k \in I$, dando lugar al coproducto categórico de la familia dada. Si se toma $\prod_{i\in I} G^i$ por $(\prod_{i\in I} G^i)_p = \prod_{i\in I} G^i_p$, y $p_k : \prod_{i\in I} G^i \to G^k$, se toma la subbase exterior formada por los subgrupos simpliciales de la forma $p_k^{-1}(E_k)$, $E_k \in \varepsilon_k$, $k \in I$, teniéndose el producto. Con estas nociones y resultados se comprueba la completitud y cocompletitud de esta categoría. Si se considera el grupo abeliano simplicial $0 : \mathbf{\Delta^{op}} \to \mathbf{Ab}$ dado por $0_p = 0$, $p \geq 0$, y como externología $\{0\}$, se comprueba que $(0,\{0\})$ es el objeto cero. Se verifica que es una categoría simplicial. Las construcciones tanto del tensor como del funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}$ son análogas a las hechas para $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}}$.

Definición 4.36 Sea (G,ε) un grupo abeliano simplicial exterior y K un conjunto simplicial. Se considera $G \otimes K$ grupo abeliano simplicial exterior, olvidándose en G de la extructura exterior, junto con la familia de subgrupos simpliciales E, tales que, para cada $p \geq 0$, $\sigma \in K_p$, existe $F^\sigma \subset K$ y existe $H^\sigma \in \varepsilon$, con $\sigma \in H^\sigma_p$ tal que $H^\sigma \otimes F^\sigma < E$.

Nota: Si (G,ε) es un grupo abeliano simplicial exterior y K un conjunto simplicial finito, $\varepsilon_{G\otimes K} = \{E < G \otimes K : \exists F \in \varepsilon, F \otimes K < E\}$.

Proposición 4.37 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(G \otimes K, H) \cong Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(G,H)).$$

Definición 4.38 Sea G un grupo abeliano simplicial exterior y K un conjunto simplicial. Se define G^K como $(G^K)_p = Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(K \times \Delta[p], G)$, $p \geq 0$ $(G \equiv U(G))$, y con externología cuya base exterior está formada por los de la forma E^K, $E \in \varepsilon_G$.

Nótese que aunque en $Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(K \times \Delta[p], G)$ se olvida de la estructura algebraica de G así como de su externología, se induce una estructura de grupo abeliano simplicial exterior, de forma obvia: $(f+f')_q = f_q + f'_q$. Existe también una biyección natural, $Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(G \otimes K, H) \cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(G, H^K)$, donde G, H recorren los grupos abelianos simpliciales exteriores y K los conjuntos simpliciales finitos.

Otra categoría de interés es la de *los grupos abelianos exteriores.* Sus objetos son pares (G,ε), con G grupo abeliano y ε una familia no vacía de subgrupos de G, llamados *exteriores* verificando que la intersección de dos elementos de ε es de ε y que todo subgrupo de G que contenga a un elemento de ε vuelve a ser de ε. Por otro lado, sus morfismos son homomorfismos de grupos $f : G \to G'$ tales que $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$. Esta nueva categoría se denota por **E-Ab**. De forma similar a **E-Sets**, esta categoría es completa y cocompleta con objeto cero $(0,\{0\})$. Además **E-Ab** es una categoría aditiva (aunque no es abeliana).

$(\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta^{op}}}$ como categoría de objetos simpliciales es una categoría simplicial, además es completa y cocompleta, por lo que si G es un grupo abeliano exterior simplicial y K es un conjunto simplicial, entonces existe el grupo abeliano exterior simplicial $G \otimes K$, y viene dado por $(G \otimes K)_p = \coprod_{k\in K_p} G_p$, $p \geq 0$. De forma análoga a conjuntos, existe un funtor fiel,

$$W' : \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}} \to (\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta^{op}}},$$

que conserva el tensor $\_ \otimes \_$, restringido a conjuntos simpliciales con un número finito de símplices en cada dimensión. Este funtor viene definido como $W'((G,\varepsilon))_n = (G_n, \varepsilon_n)$, donde ε_n es la externología que admite como base exterior a $\{E_n : E \in \varepsilon\}$.

Se tiene también que W' conserva los cilindros, es decir,

$$W'(G \otimes \Delta[1]) = W'(G) \otimes \Delta[1].$$

Se ven ahora relaciones entre todas las categorías simpliciales definidas, esto es, conjuntos simpliciales exteriores, grupos abelianos simpliciales exteriores, conjuntos exteriores simpliciales y grupos abelianos exteriores simpliciales. Estas relaciones, funtoriales, se deducen de la adjunción existente entre el funtor libre, de conjuntos a grupos abelianos, y el funtor olvido, de grupos abelianos a conjuntos.

Se denota por $L : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Ab}$ al funtor *libre*, que asigna a cada conjunto X el grupo abeliano libre generado por X, $L(X)$. Si $f : X \to X'$ es una aplicación, el homomorfismo $L(f) : L(X) \to L(X')$, dado por $L(f)(x) = f(x)$, para cada $x \in X$, extendiéndose por linealidad. Por otro lado, existe un funtor de *olvido* $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Sets}$, que prescinde de la estructura algebraica del conjunto. L es un funtor adjunto a izquierda de U.

Definición 4.39 Dado (X, ε) un conjunto exterior $(E\text{-}L)((X, \varepsilon))$ es el grupo abeliano exterior dado por el par $(L(X), \varepsilon_{(E\text{-}L)((X,\varepsilon))})$, donde $L(X)$ es el grupo abeliano libre generado por X y la externología es aquella que admite como base exterior los subgrupos de la forma $L(E)$, $E \in \varepsilon$.

Definición 4.40 Si (G, ε) un grupo abeliano exterior, se considera $(E\text{-}U)((G, \varepsilon))$,

el conjunto exterior formado por el par $(U(X), \varepsilon_{(E\text{-}U)((G,\varepsilon))})$ donde $U(G)$ es el olvido de G y la externología admite como base exterior los subconjuntos de la forma $U(E)$, $E \in \varepsilon$.

Si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es un funtor e $\mathbf{I}$ una categoría pequeña se denota por $F^I : \mathbf{C}^\mathbf{I} \to \mathbf{D}^\mathbf{I}$ al funtor definido como $F^I(X)$ la composición FX y $F^I(\alpha) = F(\alpha)$.

Otra adjunción a tener en cuenta es

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}} \underset{U^{\Delta^{op}}}{\overset{L^{\Delta^{op}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}.$$

Aquí, el objeto $E\text{-}L^{\Delta^{op}}((X, \varepsilon))$ es el par definido como $(L^{\Delta^{op}}(X), \varepsilon_{E\text{-}L^{\Delta^{op}}((X,\varepsilon))})$, donde la externología tiene como base exterior a los de la forma $L^{\Delta^{op}}(E)$, $E \in \varepsilon$. Análogamente para morfismos. De igual forma se define un funtor $E\text{-}U^{\Delta^{op}}$, que resulta ser adjunto a derecha de $E\text{-}L^{\Delta^{op}}$.

Teorema 4.41 *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}} & \underset{E\text{-}U^{\Delta^{op}}}{\overset{E\text{-}L^{\Delta^{op}}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}} \\
{\scriptstyle W}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W'} \\
(\mathbf{E\text{-}Sets})^{\mathbf{\Delta^{op}}} & \underset{(E\text{-}U)^{\Delta^{op}}}{\overset{(E\text{-}L)^{\Delta^{op}}}{\rightleftarrows}} & (\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta^{op}}}
\end{array}$$

es conmutativo, donde las flechas horizontales son adjunciones.

Referencias

[1] R. Ayala, E. Dominguez and A. Quintero. A theoretical framework for Proper Homotopy Theory. *Math. Proc. Camb. Philos. Camb. Soc.* **107** (1990), 475-482.

[2] H.J. Baues. *Foundations of proper homotopy theory.* Preprint 1992.

[3] D. Bassendoski. *Whitehead and Hurewicz theorems in proper homotopy theorey.* Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 1977.

[4] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra.* Encyclopedia of Math. and its applications. Cambridge University Press. Vol. **50**,**51** (1994).

[5] E.M. Brown. *On the proper homotopy type of simplicial complexes.* Lect. Notes in Math. **375**, (1975).

[6] K.S. Brown. Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology. *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1973), 419-458.

[7] J. Cabeza, M.C. Elvira and L.J. Hernández. Una categoría cofibrada para las aplicaciones propias. *Actas XIV Jor. Hispano-Lusas, Vol. II, Univ. de La Laguna,* (1989), 595-590.

[8] Z. Čerin. On various relative proper homotopy groups. *Tsukuba J. Math.* **4** (1980), 177-202.

[9] D. Edwards and H. Hastings. Čech *and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology.* Lect. Notes Math. **542** (Springer, 1976).

[10] J.I. Extremiana, L.J. Hernández and M.T. Rivas. Proper CW complexes: A category for the estudy of proper homotopy. *Collectanea Math.* **39** (1988), 149-179.

[11] F.T. Farrell, L.R. Taylor and J.B. Wagoner. The Whitehead theorem in the proper category. *Compositio Math.* **27** (1973), 1-23.

[12] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Springer, Berlin (1966).

[13] J. García-Calcines, M. García-Pinillos and L. J. Hernández. A closed simplicial model category for proper homotopy and shape theories. *Bull. Austr. Math. Soc.* **57**, 221-242, (1998).

[14] M. García-Pinillos. El estudio del infinito a través del espacio exterior. *Univ. de La Rioja.* Tesis (1998).

[15] J.W. Grossman. A homotopy theory of pro-spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **201** (1975), 161-170.

[16] J.W. Grossman. Homotopy Groups of Pro-spaces. *Illinois J. Math.* **20** (1976), 622-625.

[17] L.J. Hernández. Applications of simplicial M-Sets to proper and strong shape theories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347** (1995), 363-409.

[18] L.J. Hernández and T. Porter. Global analogues of the Brown-Grossman proper homotopy groups. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **104** (1988), 483-496.

[19] P.J. Hilton and U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra.* Springer GTM 4, New York, (1971).

[20] D.M. Kan. A combinatorial definition of homotopy groups. *Ann. of Math.* **67** (1958), 282-312.

[21] D. M. Kan. On homotopy theory and C.S.S. groups. *Ann. of Math.* **68** (1958), 38-53.

[22] B. Kerékjárto. *Vorlesungen uber Topologie.* vol. 1, Springer-Verlag (1923).

[23] S. Mac Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic.* (Springer-Verlag, 1991).

[24] J.P. May. *Simplicial Objects in Algebraic Topology.* Van Nostrand, 1967.

[25] J. Milnor. The geometric realization of a semi-simplicial complex. *Ann. of Math.* **65** (1957), 357-362.

[26] J.G. Miranda. Estructuras de modelos y teoría de homotopía en categorías de grupos y grupoides simpliciales. *Univ. de Granada.* Tesis (1995).

[27] J.C. Moore. *Seminar on algebraic homotopy theory.* Princeton (1956).

[28] E. Padrón and S. Rodríguez-Machín. Model-Additive categories. *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, serie II,* **24** (1990), 465-474.

[29] T. Porter. Abstract homotopy theory in procategories. *Cahiers de topologie et geometrie differentielle*, vol. **17** (1976), 113-124.

[30] T. Porter. Proper homotopy theory. *Handbook of Algebraic Topology* (ch. 3) (1995), 127-167.

[31] D. Quillen. *Homotopical Algebra.* Lect. Notes in Math. **43** (Springer, 1967).

[32] D. Quillen. Rational Homotopy Theory. *Ann. of Math.* **90** (1969), 205-295.

[33] L.C. Siebenmann. The obstruction of finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five. Thesis, 1965.

[34] L.C. Siebenmann. Infinite simple homotopy types. *Indag. Math.* **32** (1970), 479-495.