Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **57:** 113–134, (2002).

Homotopía propia simplicial II *

J. M. García Calcines[1] L. J. Hernández Paricio[2]
S. Rodríguez Machín[1]

[1] *Departamento de Matemática Fundamental*
Universidad de la Laguna
38271 La Laguna, SPAIN
E-mails: jmgarcal@ull.es, seroma@ull.es

[2] *Departamento de Matemáticas y Computación*
Universidad de La Rioja
26004 Logroño, SPAIN
E-mail: luis-javier.hernandez@dmc.unirioja.es

Abstract

Taking into account the simplicial models given in the category of exterior spaces we define and develop homology invariants for this category: the M-homology and the $\mathfrak{R}$-homology, as well as the tubular and the closed tubular homologies. As an application we give a description of the reduced Steenrod homology for compact metric spaces, X, in terms of the closed tubular homology of the Lefschetz's fundamental complex $OFC(X)$.

1 Introducción

En este trabajo continuamos el iniciado en "Homotopía propia simplicial I" (ver [21]) y nos dedicamos fundamentalmente a estudiar invariantes de naturaleza homológica para la categoría de los espacios exteriores $\mathbf{E}$, en concreto la M-homología, u homología con la acción del monoide M, y la $\mathfrak{R}$-homología. Para ello se hace un análisis preliminar de las distintas categorías de complejos de cadenas involucradas, así como de las categorías exteriores de complejos de cadenas, creadas partiendo de categorías en las que intervienen los grupos abelianos con las nociones de exterior y simplicial. Estas relaciones se harán a través de funtores de tipo Moore y de sumas alternas, aunque el que se utiliza en la práctica es este último. Posteriormente se hace un estudio algebraico del anillo de las matrices localmente finitas con coeficientes enteros y el funtor $\mathcal{P}$ de Brown, importantes para la construcción de la $\mathfrak{R}$-homología. Se estudian las homologías en sí que surgen cuando existe la acción del monoide y en la que interviene el anillo $\mathfrak{R}$, presentando riqueza en propiedades, como existencia de sucesiones exactas largas de homología, invarianza por homotopía exterior, etc. Cabe destacar la creación en la $\mathfrak{R}$-homología de un algoritmo de cálculo para una amplia clase de gCW complejos; para ello se define el *complejo de cadenas* $\mathfrak{R}$*-celular* de X y se ve que los grupos de homología del gCW complejo X son los de su complejo de cadenas $\mathfrak{R}$-celular asociado.

La última sección está dedicada al estudio de otras homologías en los espacios exteriores que se derivan de las ya estudiadas: la homología tubular y la tubular cerrada. Estas homologías tienen especial

*Los autores quieren agradecer a la Dirección General de Enseñanza Superior y a la Dirección General de Universidades e Investigación del Gobierno de Canarias por su aportación financiera en la realización de ese trabajo.

importancia en el estudio del final de un espacio exterior y tienen como análogos la homología del final y la localmente finita respectivamente de un espacio topológico. Entre sus propiedades destacan la existencia de una sucesión exacta larga de homología, invarianza por homotopía exterior, aditividad finita y teoremas de tipo escisivo. En 1940 Steenrod [37] definió grupos de homología para los espacios métrico-compactos basados en ciclos regulares. Posteriormente, en 1961, J. Milnor [33] dio una caracterización axiomática para este tipo de grupos en la categoría de los pares de espacios métrico-compactos. Para un CW complejo contable y localmente finito la homología reducida de Steenrod de su compactificación de Alexandroff es precisamente la homología celular basada en ciclos infinitos; es decir, se toma el complejo formado por un producto de cíclicos infinitos donde el conjunto de índices de dicho producto es el cardinal de las celdas de la dimensión correspondiente y el operador borde es el inducido por los números de incidencia de dichas celdas. La importancia de la homología tubular cerrada radica en que, para CW complejos, K, localmente finitos y con un número contable de celdas en cada dimensión su homología celular localmente finita coincide, salvo un salto de dimensión, con la homología tubular cerrada K dotado de cierta estructura de gCW complejo, teniéndose como consecuencia que la homología reducida de Steenrod de un espacio métrico-compacto X es isomorfa a la homología tubular cerrada de su complejo fundamental de Lefschetz asociado [29], también llamado construcción telescópica de Milnor.

2 Categorías de complejos de cadenas.

Dada $\mathbf{A}$ una categoría abeliana se tiene una pareja de funtores,

$$\mathbf{A}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}} \underset{P}{\overset{N}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ch}^{+}\mathbf{A},$$

entre la categoría de objetos simpliciales de $\mathbf{A}$ y la categoría de complejos de cadenas positivos en $\mathbf{A}$. El funtor N asigna a cada objeto simplicial, X, el complejo $N(X)$, llamado *complejo de Moore*, y dado por

$$\begin{array}{l} N(X)_n = \cap_{i=0}^{n-1} ker\{\partial_i : X_n \to X_{n-1}\} \\ d_n^{N(X)} = \partial_n | N(X)_n : N(X)_n \to N(X)_{n-1}, \ \ n \geq 1. \end{array}$$

El funtor N, junto con el funtor P que describiremos posteriormente, da lugar a una equivalencia de categorías por el Teorema de Dold-Puppe.

Por otro lado existe otro funtor, $K : \mathbf{A}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}} \to \mathbf{Ch}^{+}\mathbf{A}$, que a cada objeto simplicial de $\mathbf{A}$, X, lo transforma en el complejo $K(X)$:

$$\begin{array}{l} K(X)_n = X_n \\ d_n^{K(X)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i : X_n \to X_{n-1}. \end{array}$$

Este último funtor es mucho más usado en homología a pesar de no ser una equivalencia de categorías. No obstante, los funtores N y K están relacionados pues existe una transformación natural $i : N \to K$, la inclusión canónica, tal que cada componente es una equivalencia de homotopía.

Se introduce y analiza la categoría de los *complejos de cadenas exteriores positivos de grupos abelianos*. Esta categoría es equivalente a la de grupos abelianos simpliciales exteriores mediante una relación del tipo Dold-Puppe.

Dado un complejo de cadenas de grupos abelianos, (X, d^X), se puede hablar de intersección de subcomplejos. También, si $f : X \to Y$ es un morfismo de complejos, de la imagen y antiimagen de subcomplejos. Se supondrá a partir de ahora que los complejos considerados son positivos y se denotará un contenido, $\subset$, cuando se haga referencia a subcomplejos.

Definición 2.1 Un *complejo de cadenas exterior de grupos abelianos* consiste en un par (X, ε), donde X es un complejo de cadenas de grupos abelianos y ε es una familia no vacía de subcomplejos de X verificando:

(i) Si $E_1, E_2 \in \varepsilon$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;
(ii) Si $E \in \varepsilon$, $F \subset X$ y $E \subset F$ entonces $F \in \varepsilon$.

Definición 2.2 Dado $f : (X, \varepsilon) \to (X', \varepsilon')$, un morfismo de complejos entre complejos exteriores, se dice que es *exterior* si $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

Esta categoría se denotará como **E-Ch$^+$Ab**, y se denominará *de complejos de cadenas exteriores de grupos abelianos.* La siguiente construcción da lugar a un complejo de cadenas exterior de grupos abelianos, para cada grupo abeliano simplicial exterior:

Definición 2.3 Si (G, ε) es un grupo abeliano simplicial exterior, se define el complejo exterior

$$(E\text{-}N)((G, \varepsilon)),$$

como el par $(N(G), \varepsilon_{(E\text{-}N)((G,\varepsilon))})$, donde $N(G)$ es el complejo de Moore usual y la externología es la que admite como base exterior a los subcomplejos de la forma $N(E)$, $E \in \varepsilon$.

Si $f : (G, \varepsilon) \to (G', \varepsilon')$ es un homomorfismo simplicial exterior, se induce de forma natural un morfismo de complejos exterior,

$$(E\text{-}N)(f) = N(f) : N(G) \to N(G').$$

Dado $E \in \varepsilon'$, $f^{-1}(E) \in \varepsilon$ y $N(f)(N(f^{-1}(E))) \subset N(E)$, luego efectivamente, es exterior. Todo esto da lugar a un funtor $E\text{-}N : \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}} \to \mathbf{E\text{-}Ch^+Ab}$.

Para el caso clásico de los grupos abelianos, el funtor P de la equivalencia de categorías tiene la definición siguiente: Para cada $q \geq 0$, se considera $K[q] = L^{\Delta^{op}}(\Delta[q])$, el grupo abeliano simplicial generado por $\Delta[q]$, esto es,

$$K[q]_n = L(\Delta[q]_n),$$
$$K[q](\varphi) = L(\Delta[q](\varphi)).$$

Entonces se considera el complejo de cadenas $N[q] = N(K[q])$. Si C es un complejo de cadenas positivo de grupos abelianos, y $f : C \to C'$ es un morfismo de complejos,

$$\begin{aligned} P(C)_q &= Hom_{\mathbf{Ch^+Ab}}(N[q], C), \\ P(C)(\varphi) &= Hom_{\mathbf{Ch^+Ab}}(NL^{\Delta^{op}}(\varphi_*), id_C) = (NL^{\Delta^{op}}(\varphi_*))^*, \\ P(f)_q &= f_*. \end{aligned}$$

Este funtor se puede generalizar al caso exterior.

Definición 2.4 Si (C, ε) es un complejo de cadenas exterior de grupos abelianos, se define el grupo abeliano simplicial exterior,

$$(E\text{-}P)((C, \varepsilon)),$$

al formado por el par $(P(C), \varepsilon_{(E\text{-}P)((C,\varepsilon))})$, donde la externología es aquella que admite como base exterior los subgrupos simpliciales de la forma $P(E)$, $E \in \varepsilon$.

Es bien conocido que la homotopía en complejos de cadenas se puede describir en función del complejo de cadenas $N[1]$, anteriormente descrito: Si la categoría abeliana, $\mathbf{A}$, es la de módulos sobre un anillo Λ, C^1, C^2 son complejos de cadenas de módulos, se tiene el producto tensorial $C^1 \otimes C^2$,

$$\begin{aligned} (C^1 \otimes C^2)_p &= \oplus_{i+j=p}(C^1_i \otimes C^2_j), \\ d(c^1_i \otimes c^2_j) &= d^1(c^1_i) \otimes c^2_j + (-1)^i c^1_i \otimes d^2(c^2_j), \quad c^1_i \in C^1_i, c^2_j \in C^2_j. \end{aligned}$$

Sean e_0, e_1 los generadores de $N[1]_0$, y sea e el generador de $N[1]_1$ con $d(e) = e_1 - e_0$. Una homotopía de complejos entre f^0 y f^1, homomorfismos de complejos $C \to C'$, es un morfismo de complejos D :

$C \otimes N[1] \to C'$ con $D(e_i \otimes c) = f^i(c)$. Si existe tal homotopía, se dice que f^0 es homótopo a f^1. En realidad, las dos nociones de homotopía existentes coinciden (véase [9]). Para módulos simpliciales K^1, K^2 se define $K^1 \times K^2$ como

$$(K^1 \times K^2)_q = K^1_q \otimes K^2_q,$$
$$(K^1 \times K^2)(\varphi) = K^1(\varphi) \times K^2(\varphi).$$

Se comprueba que, si M es un módulo simplicial y K es un conjunto simplicial finito, entonces $M \otimes L^{\Delta^{op}}(K) = M \times L^{\Delta^{op}}(K)$. El funtor N preserva la homotopía.

Si $f : (C, \varepsilon) \to (C', \varepsilon')$ un morfismo en $\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ch}^+\mathbf{Ab}$ se induce otro en $\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}$, $(E\text{-}P)(f) = P(f)$.

Nótese que si $E \in \varepsilon'$, $P(f)(P(f^{-1}(E))) \subset P(E)$, por lo que, efectivamente, es exterior. Se obtiene de aquí un funtor $E\text{-}P : \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ch}^+\mathbf{Ab} \to \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}$.

El Teorema de Dold-Puppe [11] asegura que existen isomorfismos naturales $NP \cong id$, $id \cong PN$, haciendo que $\mathbf{Ch}^+\mathbf{Ab}$ y $\mathbf{Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}$ sean equivalentes. Ocurre también esto con los funtores $E\text{-}N$ y $E\text{-}P$, por lo tanto:

Teorema 2.5 *Las categorías* $\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ch}^+\mathbf{Ab}$, $\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}$ *son equivalentes.*

Definición 2.6 Se define el funtor $E\text{-}K : \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}} \to \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ch}^+\mathbf{Ab}$ que a cada grupo abeliano simplicial (G, ε), le hace corresponder el complejo $K(G)$ junto con la externología generada por la base exterior $\{K(E) : E \in \varepsilon\}$. Para cada morfismo $f : (G, \varepsilon) \to (G', \varepsilon')$, $(E\text{-}K)(f)_n = f_n$, que, de forma natural, es exterior.

Por un lado, se ha definido la categoría de complejos de cadenas exteriores de grupos abelianos, y por otro, se tiene la categoría de complejos de cadenas de grupos abelianos exteriores. Estas categorías están relacionadas por un funtor fiel $W'' : \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ch}^+\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab})$. $W''((C, \varepsilon))$ viene definido como $W''((C, \varepsilon))_n = (C_n, \varepsilon_n)$, donde ε_n es la externología en C_n cuya base exterior está formada por los subgrupos $\{E_n : E \in \varepsilon\}$;

Obsérvese que, a pesar de que la categoría de los grupos abelianos exteriores no es abeliana se pueden construir los funtores $K, N : (\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \to \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab})$, sin ningún problema, gracias a su aditividad.

Proposición 2.7 *Los diagramas*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}} \arrow[r, "E\text{-}K"] \arrow[d, "W'"'] & \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ch}^+\mathbf{Ab} \arrow[d, "W''"] \\ (\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \arrow[r, "K"'] & \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}} \arrow[r, "E\text{-}N"] \arrow[d, "W'"'] & \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ch}^+\mathbf{Ab} \arrow[d, "W''"] \\ (\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \arrow[r, "N"'] & \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}), \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

3 El anillo de las matrices localmente finitas.

En esta sección se introduce el anillo $\mathfrak{R}$, de las matrices localmente finitas así como un funtor aditivo adjunto a derecha, $\mathcal{P} : \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab} \to \mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}$, de los grupos abelianos exteriores a los $\mathfrak{R}$-módulos a derecha, que dará lugar a una gran cantidad de relaciones y propiedades útiles para la homología. Se considera $\mathbb{N}$, el conjunto exterior cuya externología es la de los complementos de sus subconjuntos finitos. Si $\mathbb{N}(k) = \{i \in \mathbb{N} : i \geq k\}$, entonces $\{\mathbb{N}(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una base exterior. Sea el grupo abeliano exterior $(E\text{-}L)(\mathbb{N})$, es decir, $\oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}$ con la externología con base exterior $\{\oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Denotando por e_i la sucesión de enteros $(0, 0, ..., 0, 1^{(i}, 0, 0, ...)$ entonces $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ genera, claramente, a $\oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}$. Por simplificar, se denotará a este grupo abeliano exterior por $\mathfrak{Z}$.

Dar un homomorfismo exterior, $\alpha : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$, es lo mismo que dar las imágenes $\{\alpha(e_i)\}_{i=0}^{\infty}$. Cada $\alpha(e_i)$ es una combinación lineal finita de elementos $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$, y por otro lado, como α es exterior, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(\oplus_{i=l}^{\infty}\mathbb{Z}) \subset \oplus_{i=k}^{\infty}\mathbb{Z}$. De esta manera, α se puede identificar con una matriz infinita de orden $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con coeficientes enteros tal que cada columna y cada fila tiene un número finito de enteros no nulos. Este tipo de matriz se denomina *localmente finita* sobre $\mathbb{Z}$. Si $\alpha(e_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_k^i e_i$, con $k = 0, 1, ...$, entonces se interpreta como

$$A_\alpha = (\alpha_j^i).$$

El conjunto de las matrices localmente finitas sobre $\mathbb{Z}$ se denota como $lf(\mathbb{Z})$. En este conjunto se puede definir sin ningún problema la suma y producto matriciales dotándolo de estructura de anillo con unidad. Por otra parte se considera $Hom_{\textbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ definiéndose $(\alpha + \beta)(k) = \alpha(k) + \beta(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces $Hom_{\textbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ con la suma y la composición tiene estructura de anillo con unidad. Además,

Proposición 3.1 $Hom_{\textbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ *y* $lf(\mathbb{Z})$ *son anillos isomorfos.*

Se llamará $\mathfrak{R}$ al anillo $Hom_{\textbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ o bien $lf(\mathbb{Z})$, y $\mathfrak{R}$-**Mod** a la categoría de $\mathfrak{R}$-módulos por la derecha.

Proposición 3.2 $Hom_{\textbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, \_)$ *es un funtor de* **E-Ab** *a* $\mathfrak{R}$-**Mod**.

Se denotará por $\mathcal{P}$ al funtor $Hom_{\textbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, \_)$ y se denominará *funtor de Brown.* El funtor $\mathcal{P}$ no es ni fiel ni pleno. Sin embargo se tiene una propiedad interesante.

Proposición 3.3 *Existe un isomorfismo natural de* $\mathfrak{R}$*-módulos,*

$$Hom_{\textbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, G) \cong Hom_{\mathfrak{R}\textbf{-Mod}}(\mathcal{P}(\mathfrak{Z}), \mathcal{P}(G)),$$

cuando G *recorre los grupos abelianos exteriores.*

Obsérvese que el resultado no sólo dice que es biyección natural, sino que, además dice que es isomorfismo natural de $\mathfrak{R}$-módulos.

Proposición 3.4 *Existe un funtor adjunto a izquierda de* $\mathcal{P}$,

$$V : \mathfrak{R}\textbf{-Mod} \to \textbf{E-Ab}.$$

Se deduce inmediatamente que $V(\mathfrak{R}) \cong \mathfrak{Z}$, puesto que para cada grupo abeliano exterior G,

$$Hom_{\textbf{E-Ab}}(V(\mathfrak{R}), G) \cong Hom_{\mathfrak{R}\textbf{-Mod}}(\mathfrak{R}, \mathcal{P}(G)) \cong \mathcal{P}(G) = Hom_{\textbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, G).$$

Además, se tiene

Proposición 3.5 $\mathcal{P} : \textbf{E-Ab} \to \mathfrak{R}\textbf{-Mod}$ *es un funtor aditivo.*

Existe de forma natural una adjunción,

$$(\mathfrak{R}\textbf{-Mod})^{\boldsymbol{\Delta}^{\textbf{op}}} \underset{\mathcal{P}^{\Delta^{op}}}{\overset{V^{\Delta^{op}}}{\rightleftarrows}} (\textbf{E-Ab})^{\boldsymbol{\Delta}^{\textbf{op}}}.$$

Además, como $\mathcal{P}$ preserva los límites al ser adjunto a derecha, entonces $\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(X^K) = \mathcal{P}^{\Delta^{op}}(X)^K$, para X grupo abeliano exterior simplicial y K conjunto simplicial.

Notación: Dado $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtor entre categorías punteadas, tal que preserva el objeto cero, se induce un funtor entre las respectivas categorías de complejos de cadenas, $Ch(F) : \mathbf{ChC} \to \mathbf{ChD}$,

$$Ch(F)(X)_n = F(X_n), \quad d_n^{Ch(F)(X)} = F(d_n^X),$$
$$Ch(F)(f)_n = F(f_n).$$

Proposición 3.6 *Existe una adjunción,*

$$\mathbf{Ch}^+(\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}) \underset{Ch^+(V)}{\overset{Ch^+(\mathcal{P})}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}),$$

$Ch^+(V) \dashv Ch^+(\mathcal{P})$.

Para finalizar esta sección, se dan las relaciones de este funtor $\mathcal{P}$ con los funtores N y K mediante diagramas conmutativos de funtores.

Proposición 3.7 *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\mathcal{P}^{\Delta^{op}}"'] & \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}) \arrow[d, "Ch^+(\mathcal{P})"] \\
(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \arrow[r, "N"'] & \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}).
\end{tikzcd}$$

Análogamente, existe otro diagrama conmutativo sustituyendo N por K.

4 Homologías en la categoría de los espacios exteriores.

En esta sección se crean invariantes de tipo homológico siguiendo la línea de los modelos simpliciales creados y aprovechando todas las propiedades vistas. En primer lugar se hace un estudio de la homología que surge cuando existe la acción del monoide $M = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, viéndose que coincide con la homología singular clásica de un determinado espacio de funciones. Este hecho hace que tenga propiedades tales como la existencia de una sucesión exacta larga de homología, la invarianza por homotopía exterior y un teorema de Hurewicz en el que estarán involucrados los grupos de homotopía de tipo Brown [21].

En la otra homología intervendrá el mencionado anillo de las matrices localmente finitas. Entre sus propiedades más destacadas están la invarianza por homotopía exterior, un teorema de tipo escisivo, la aditividad finita y un algoritmo de cálculo para gCW complejos.

4.1 M-homología

Definición 4.1 Sea X un espacio exterior. Un *M-n-símplice singular exterior* es una aplicación exterior $u : \mathbb{N}\bar{\times}\Delta_n \to X$. La *i-cara* de u es el $(n-1)$-símplice singular exterior $u(id_{\mathbb{N}}\bar{\times}\tilde{\delta}_i)$, donde $\tilde{\delta}_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ es la inducida por $\delta_i : [n-1] \to [n]$, $0 \leq i \leq n$.

Si X es un espacio exterior se construye un complejo de cadenas de grupos abelianos con la acción del monoide M según la composición de funtores:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{Sing_e} (\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \xrightarrow{(L^{M^{op}})^{\Delta^{op}}} (\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \xrightarrow{K} \mathbf{Ch}^+(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}}).$$

Nótese que M es una categoría pequeña y **Ab** es abeliana, por lo que $\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}}$ es una categoría abeliana. Así, se tiene una equivalencia de categorías: $(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \simeq \mathbf{Ch}^+(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}})$, mediante los funtores N y P. La composición de todos estos funtores $\mathbf{E} \to \mathbf{Ch}^+(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}})$ se denominará por C^M, *complejo de cadenas de M-grupos abelianos.* Explícitamente, si X es un espacio exterior y f es una aplicación exterior, entonces

$$C^M(X)_n = L(Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}\Delta_n, X)),$$
$$d_n^{C^M(X)} = \textstyle\sum_{i=0}^n (-1)^i L((id_{\mathbb{N}}\bar{\times}\tilde{\delta}_i)^*),$$
$$C^M(f)_n = L(f_*).$$

Definición 4.2 Una *pareja exterior*, (X, A), consiste en un espacio exterior X y un subespacio exterior $A \subset X$.

Como $C^M(A)$ es un subcomplejo de $C^M(X)$ se puede considerar el complejo cociente $C^M(X)/C^M(A)$, llamado *complejo de cadenas de M-grupos de X relativo a A*, y denotado por $C^M(X, A)$. Un morfismo de parejas exteriores $(X, A) \to (Y, B)$ consiste en un par de aplicaciones exteriores, (f, g), $f : X \to Y$, $g : A \to B$ haciendo conmutativo a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & B \arrow[d, hook, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

donde i, j son las inclusiones canónicas respectivas. Nótese que $g = f|A$, por lo que, de hecho, consiste en dar una aplicación exterior $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$. Se induce de forma natural un morfismo de complejos $\overline{C^M(f)} = C^M(f, g) : C^M(X, A) \to C^M(Y, B)$ dado por la inducida en los cocientes de $C^M(f) : C^M(X) \to C^M(Y)$.

Definición 4.3 Dado (X, A) una pareja exterior se define su *n-M-grupo de homología* como el del complejo de M-grupos $C^M(X, A)$.

Si se denota por H_n^M entonces $H_n^M(X, A) = H_n(C^M(X, A))$. Esta construcción da lugar, claramente, a un funtor para cada n: $H_n^M : \mathbf{E^{(2)}} \to \mathbf{Ab^{M^{op}}}$. Para cada morfismo de parejas, f, se considera $H_n^M(f) = H_n(\overline{C^M(f)})$, comprobándose que conserva tanto la composición como la identidad. Aquí, $\mathbf{E^{(2)}}$ denota la categoría de parejas exteriores.

Si (X, A) es una pareja exterior entonces $(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}})$ es una pareja de espacios topológicos. Se puede considerar, así, la homología singular clásica, $H_n(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}})$. Cabe preguntarse qué relación existe, para cada $n \geq 0$, entre $H_n^M(X, A)$ y $H_n(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}})$. El siguiente resultado da una respuesta a esta cuestión:

Teorema 4.4 *Existe un isomorfismo natural,*

$$H_n^M(X, A) \cong H_n(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}}),$$

donde (X, A) *recorre las parejas exteriores.*

Si X es un espacio exterior se puede identificar con la pareja $(X, \emptyset)$, surgiendo la noción de homología exterior de X, $H_n^M(X) = H_n^M(X, \emptyset)$. Así, también toda aplicación exterior $f : X \to Y$ se puede considerar como $(f, \emptyset)$ pudiéndose definir su homología exterior. Uniendo lo anterior se tiene un isomorfismo natural $H_n^M(X) \cong H_n(X^{\mathbb{N}})$. Otra propiedad interesante de esta homología es la existencia de una sucesión exacta larga asociada a cada pareja exterior (X, A). Si (X, A) es una pareja exterior, entonces existe una clara sucesión exacta corta de complejos de M-grupos abelianos,

$$0 \longrightarrow C^M(A) \xrightarrow{i} C^M(X) \xrightarrow{j} C^M(X)/C^M(A) \longrightarrow 0,$$

donde i, j denotan la inclusión y proyección canónicas respectivamente. Como consecuencia:

Teorema 4.5 *Para cada pareja exterior* (X, A) *existe una sucesión exacta larga,*

$$\cdots \longrightarrow H_n^M(A) \xrightarrow{i_*} H_n^M(X) \xrightarrow{j_*} H_n^M(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^M(A) \longrightarrow \cdots,$$

donde $i_* = H_n^M(i)$, $j_* = H_n^M(j)$ *y* δ_* *es el M-homomorfismo de conexión. Además, esta sucesión es isomorfa a la correspondiente de la sucesión exacta corta:*

$$0 \longrightarrow C(A^{\mathbb{N}}) \longrightarrow C(X^{\mathbb{N}}) \longrightarrow C(X^{\mathbb{N}})/C(A^{\mathbb{N}}) \longrightarrow 0.$$

Para cada pareja exterior (X, A) surge un cilindro, $(X\bar{\times}I, A\bar{\times}I)$ y morfismos de parejas $\delta_0, \delta_1 : (X, A) \to (X\bar{\times}I, A\bar{\times}I)$, $p : (X\bar{\times}I, A\bar{\times}I) \to (X, A)$.

Definición 4.6 Sean $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ dos morfismos de parejas exteriores. Se dirá que f es homótopo a g, $f \simeq g$, si existe un morfismo de parejas, $F : (X\bar{\times}I, A\bar{\times}I) \to (Y, B)$, tal que $F\delta_0 = f$, $F\delta_1 = g$.

Esta relación es de equivalencia y compatible con la composición. Si f, g son morfismos de parejas exteriores y $f \simeq g$ entonces es sencillo establecer que $f^{\mathbb{N}} \simeq g^{\mathbb{N}}$. Por otro lado, en **Top** la homología singular es invariante por homotopía entre morfismos de parejas de espacios. Entonces se tiene un resultado análogo para exteriores, es decir, la invarianza por homotopía entre morfismos de parejas exteriores.

Teorema 4.7 *Si $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ son morfismos de parejas exteriores homótopos entonces se tiene que $H_n^M(f) = H_n^M(g)$.*

Como consecuencia, si $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una equivalencia de homotopía exterior entonces $H_n^M(f) : H_n^M(X, A) \to H_n^M(Y, B)$ es isomorfismo, para cada $n \geq 0$. Aprovechando de nuevo el isomorfismo natural $\pi_n^B((X, a)) \cong \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a)$, existe también un teorema de tipo Hurewicz.

Definición 4.8 Sea X un espacio exterior y $a \in X^{\mathbb{N}}$, $n \geq 1$. Se define el *M-homomorfismo de Hurewicz*,

$$h_n^M : \pi_n^B(X, a) \to H_n^M(X),$$

como el que se induce en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_n^B((X,a)) \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\cong"'] & H_n^M(X) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_n(X^{\mathbb{N}}, a) \arrow[r, "h_n"'] & H_n(X^{\mathbb{N}}),
\end{tikzcd}$$

donde $h_n : \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a) \to H_n(X^{\mathbb{N}})$ es el homomorfismo de Hurewicz clásico.

Como consecuencia se obtiene un teorema de tipo Hurewicz exterior:

Teorema 4.9 *Sea X un espacio exterior tal que*

$$\pi_0^B(X) = 0, \ \ \pi_k^B((X, a)) = 0, \ 1 \leq k < n,$$

para algún $a \in X^{\mathbb{N}}$, y por tanto para cualquiera, con $n \geq 2$. Entonces $h_n^M : \pi_n^B(X, a) \to H_n^M(X)$ es isomorfismo y $h_{n+1}^M : \pi_{n+1}^B(X, a) \to H_{n+1}^M(X)$ es epimorfismo.

4.2 $\mathfrak{R}$-homología

Si X es un espacio exterior se construye el complejo positivo de cadenas de $\mathfrak{R}$-módulos, $C^{\mathfrak{R}}(X)$, según la composición de funtores $C^{\mathfrak{R}} = K\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(E\text{-}L)^{\Delta^{op}}W(E\text{-}Sing) : \mathbf{E} \to \mathbf{Ch}^+(\mathbf{\mathfrak{R}\text{-}Mod})$. Explícitamente,

$$\begin{aligned} C^{\mathfrak{R}}(X)_n &= Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X))), \ \ n \geq 0, \\ d_n^{C^{\mathfrak{R}}(X)} &= \textstyle\sum_{i=0}^n (-1)^i L(\tilde{\delta}_i^{\,*})_* \end{aligned}$$

donde $L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X))$ tiene la externología formada por los subgrupos exteriores de la forma $L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, E))$, E e-abierto en X. Obsérvese también que $d_n^{C^{\mathfrak{R}}(X)}(a)(e_k) = d_n^{C(X)}(a(e_k))$, para cada $a \in C^{\mathfrak{R}}(X)_n$, $e_k \in \mathfrak{Z}$, donde $d_n^{C(X)}$ denota el operador borde singular clásico.

Si (X, A) es una pareja exterior, $C^{\mathfrak{R}}(A)$ es un subcomplejo de $\mathfrak{R}$-módulos de $C^{\mathfrak{R}}(X)$. Así, se puede definir el complejo de $\mathfrak{R}$-módulos cociente, $C^{\mathfrak{R}}(X, A) = C^{\mathfrak{R}}(X)/C^{\mathfrak{R}}(A)$.

Definición 4.10 Dada (X, A) una pareja exterior se define su *n-$\mathfrak{R}$-módulo de homología* como el del complejo de $\mathfrak{R}$-módulos, $C^{\mathfrak{R}}(X, A)$. Si se denota por $H_n^{\mathfrak{R}}$ entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(X, A) = H_n(C^{\mathfrak{R}}(X, A))$.

Obviamente esta construcción da lugar a un funtor, para cada $n : H_n^{\mathfrak{R}} : \mathbf{E^{(2)}} \to \mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}$. Por otro lado, si $A = \emptyset$, se denota $H_n^{\mathfrak{R}}(X) = H_n^{\mathfrak{R}}(X, \emptyset)$. Asociada a cada pareja exterior, (X, A) existe una sucesión exacta corta de complejos de $\mathfrak{R}$-módulos,

$$0 \longrightarrow C^{\mathfrak{R}}(A) \xrightarrow{i} C^{\mathfrak{R}}(X) \xrightarrow{j} C^{\mathfrak{R}}(X, A) \longrightarrow 0,$$

donde i, j son la inclusión y proyección canónicos respectivamente. Como consecuencia inmediata:

Teorema 4.11 *Si (X, A) es una pareja exterior entonces existe una sucesión exacta larga de homología,*

$$\cdots \longrightarrow H_n^{\mathfrak{R}}(A) \xrightarrow{i_*} H_n^{\mathfrak{R}}(X) \xrightarrow{j_*} H_n^{\mathfrak{R}}(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(A) \longrightarrow \cdots,$$

con $i_* = H_n^{\mathfrak{R}}(i)$, $j_* = H_n^{\mathfrak{R}}(j)$, y δ_* el homomorfismo de conexión.

También se tiene la invarianza homotópica exterior:

Teorema 4.12 *Si $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ son morfismos de parejas exteriores homótopos entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(f) = H_n^{\mathfrak{R}}(g)$.*

Si X es un espacio exterior se puede considerar el complejo de cadenas de grupos abelianos exteriores según la composición de funtores: $D = K(E\text{-}L)^{\Delta^{op}} W(E\text{-}Sing) : \mathbf{E} \to \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E\text{-}Ab})$. Obsérvese que, según las conmutatividades vistas, $Ch^+(\mathcal{P})D = C^{\mathfrak{R}}$.

Definición 4.13 Sea X un espacio exterior. Se dice que X es *primer contable exterior*, o bien *E-C1*, si admite una base exterior contable $\beta = \{E_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Dado X espacio exterior E-C1 se puede considerar, sin pérdida de generalidad que

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

Esta nueva noción se puede trasladar sin problemas a las categorías exteriores definidas.

Un hecho curioso en la categoría de grupos abelianos exteriores es que si $p : G \to H$ es un homomorfismo exterior sobre entonces p es cociente (sobre y la externología de H es la de aquellos subgrupos $E < H$ tales que $p^{-1}(E) \in \varepsilon_G$) si y sólo si p transforma subgrupos exteriores en subgrupos exteriores. Como consecuencia, si $p : G \to H$ es cociente entonces lleva cada base exterior de G en una base exterior de H, y si G es E-C1 entonces H también lo es. Además, se puede comprobar que en las categorías exteriores, ser E-C1 es una propiedad hereditaria. Por otro lado, si $f : \mathfrak{Z} \to G$ es un homomorfismo de grupos abelianos, donde G es grupo abeliano exterior E-C1, con base exterior $\beta = \{E_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces, se tiene que f es exterior si y sólo si existe una sucesión $\{\varphi(i)\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, con $\varphi(i) < \varphi(i+1)$, $i \in \mathbb{N}$ y tal que para cada $l \in \mathbb{N}$ y $k \geq \varphi(l)$ entonces $f(e_k) \in E_l$. De este modo, si C es un grupo abeliano exterior E-C1, C' subgrupo abeliano exterior y C/C' el grupo abeliano exterior cociente, se tiene que

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}(C') \xrightarrow{\mathcal{P}(i)} \mathcal{P}(C) \xrightarrow{\mathcal{P}(p)} \mathcal{P}(C/C') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de $\mathfrak{R}$-módulos ($i : C' \hookrightarrow C$ y $p : C \to C/C'$ denotan la inclusión y proyección canónicas, respectivamente). Además

Proposición 4.14 *Existe un isomorfismo natural,*

$$Ch^+(\mathcal{P})(D(X)/D(A)) \cong C^{\mathfrak{R}}(X, A),$$

donde (X, A) recorre las parejas exteriores E-C1.

Así, para hallar los $\mathfrak{R}$-módulos de homología de una pareja exterior (X, A) se puede hacer a partir del complejo $Ch^+(\mathcal{P})(D(X)/D(A))$. Teniendo en cuenta todo esto se tiene el teorema de escisión:

Teorema 4.15 *Sea (X, A) una pareja exterior, con X E-C1, y sea U un abierto de X tal que $Cl_X(U) \subset Int_X(A)$. Entonces la inclusión $i : (X\text{-}U, A\text{-}U) \hookrightarrow (X, A)$ induce isomorfismo en $\mathfrak{R}$-homología, es decir,*

$$H_n^{\mathfrak{R}}(i) : H_n^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U) \to H_n^{\mathfrak{R}}(X, A)$$

es isomorfismo de $\mathfrak{R}$-módulos, para cada n.

Otra propiedad interesante de esta homología es la aditividad finita:

Teorema 4.16 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^m$ una familia finita de espacios exteriores. Entonces*

$$H_n^{\mathfrak{R}}(\textstyle\coprod_{i=1}^m X_i) \cong \oplus_{i=1}^m H_n^{\mathfrak{R}}(X_i), \;\; n \geq 0.$$

Analizamos ahora la $\mathfrak{R}$-homología del espacio exterior $\mathbb{N}$. Una base exterior está constituida por los abiertos de la forma $\mathbb{N}(k) = \{i \in \mathbb{N} : i \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Así, en $D(\mathbb{N})_n = L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, \mathbb{N}))$ la externología considerada será la que tiene como base exterior $\{L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, \mathbb{N}(i)))\}_{i=0}^{\infty}$. Si se denota por $D(\mathbb{N}) = C(\mathbb{N})$, entonces la base exterior se denota como $\{C(\mathbb{N}(i))\}_{i=0}^{\infty}$.

Teorema 4.17

$$H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) = \begin{cases} \mathfrak{R}, & n = 0 \\ \\ 0, & n > 0\ . \end{cases}$$

Dado (X, τ) un espacio topológico se puede obtener un espacio exterior de dos maneras, una de ellas es considerar como externología la propia topología y otra es considerar el espacio total $\{X\}$. En ambos espacios exteriores la homología $H_n^{\mathfrak{R}}$ viene dada en función de la homología singular usual de X.

Proposición 4.18 *Sea (X, τ) espacio topológico.*
(i) Si $\varepsilon_X = \{X\}$ entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(X) \cong \prod_{i=0}^{\infty} H_n(X)$;
(ii) Si $\varepsilon_X = \tau_X$ entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(X) \cong \oplus_{i=0}^{\infty} H_n(X)$,
siendo los isomorfismos naturales.

El siguiente objetivo es definir homología reducida. Para ello habrá que restringirse a una categoría especial de espacios exteriores, $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Esta categoría tiene como objetos triángulos conmutativos,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i_X"'] & & \mathbb{N} \\ & X, \arrow[ur, "r_X"'] & \end{tikzcd}$$

que se denotarán por (i_X, X, r_X). Un morfismo $(i_X, X, r_X) \to (i_Y, Y, r_Y)$ es una aplicación exterior $f : X \to Y$ tal que $fi_X = i_Y$, $r_Y f = r_X$.

Nótese que esta categoría es una subcategoría de $\mathbf{E}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, espacios exteriores bajo y sobre $\mathbb{N}$. También, se observa que $H_n^{\mathfrak{R}}(r_X)H_n^{\mathfrak{R}}(i_X) = H_n^{\mathfrak{R}}(r_X i_X) = id_{H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})}$ por lo que $(r_X)_* = H_n^{\mathfrak{R}}(r_X)$ es epimorfismo y $(i_X)_* = H_n^{\mathfrak{R}}(i_X)$ es monomorfismo.

Definición 4.19 Sea (i_X, X, r_X) un objeto de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Se define

$$\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) = ker(H_n^{\mathfrak{R}}(X) \stackrel{(r_X)_*}{\longrightarrow} H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})).$$

Por la propiedad del núcleo, dada $f : (i_X, X, r_X) \to (i_Y, Y, r_Y)$, se induce un homomorfismo $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(f) : \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) \to \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(Y)$. En el caso que $n > 0$, entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) = 0$, por lo que $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) = H_n^{\mathfrak{R}}(X)$.

Si (X, A) es una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, esto es, la inclusión $i : A \to X$ es un morfismo de dicha categoría, se define $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X, A) = H_n^{\mathfrak{R}}(X, A)$. Si $f : X \to Y$ es exterior, en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, con $f(A) \subset B$ se define $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(f) = H_n^{\mathfrak{R}}(f)$.

Teorema 4.20 *Sea (X, A) una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Existen morfismos i_*, j_* y δ_* tales que la siguiente sucesión es exacta larga:*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X, A) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_{n-1}^{\mathfrak{R}}(A) \longrightarrow \cdots$$

También se da la invarianza homotópica:

Teorema 4.21 *Sean $f, g : (i_X, X, r_X) \to (i_Y, Y, r_Y)$ homótopas exteriormente. Entonces $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(f) = \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(g)$.*

Es de destacar una relación natural entre la homología $H_*^{\mathfrak{R}}$ y su reducida, $\tilde{H}_*^{\mathfrak{R}}$. Se observa que existe una sucesión exacta corta,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) \arrow[r] & H_n^{\mathfrak{R}}(X) \arrow[r] & H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) \arrow[r] \arrow[l, bend right, dotted] & 0 , \end{tikzcd}$$

que escinde, así $H_n^{\mathfrak{R}}(X) \cong \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) \oplus H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})$, $n \geq 0$.

Analizamos, a continuación, un algoritmo de cálculo de la $\mathfrak{R}$-homología para ciertos gCW complejos. Para ello se comienza viendo homología en celdas y esferas. Si S^n es la n-esfera, se denota por $\mathfrak{S}^n = \mathbb{N}\bar{\times}S^n$. Claramente es un objeto de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ definiendo $i_{\mathfrak{S}^n}(k) = (k, s_0)$, y $r_{\mathfrak{S}^n}(k, x) = k$, donde $s_0 = (0, 0, ..., 0, -1) \in S^n$. Otro objeto especial es $\mathbb{N}$, donde $i_{\mathbb{N}} = r_{\mathbb{N}} = id_{\mathbb{N}}$. Evidentemente, se tiene que $\tilde{H}_i^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}\bar{\times}\{s_0\} \subset \mathfrak{S}^n$, se considerará a $\mathbb{N}$ como un subespacio exterior de $\mathfrak{S}^n$. Además $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathfrak{S}^n$ es un morfismo de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Otro objeto a considerar es $\mathfrak{D}^n = \mathbb{N}\bar{\times}D^n$, $n \geq 0$, donde D^n es el n-disco. Aquí, $i_{\mathfrak{D}^n}(k) = (k, s_0)$ y $r_{\mathfrak{D}^n}(k, x) = k$. Haciendo uso, entre otras propiedades, del teorema de escisión y por argumentos análogos a los hechos en el caso clásico de la homología singular obtenemos:

Proposición 4.22
(i) $\tilde{H}_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n) \cong \tilde{H}_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$,
(ii) $\tilde{H}_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^{n+1}) \cong \tilde{H}_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Como consecuencia:

Teorema 4.23

$$\tilde{H}_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} \mathfrak{R}, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases} , \qquad H_0^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{R}, & n = 0 \\ \mathfrak{R}, & n > 0 . \end{cases}$$

Si $n \geq 1$:

$$H_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{D}^n, \mathfrak{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathfrak{R}, & i = n \\ 0, & i \neq n . \end{cases}$$

Considerando las esferas S^{n-1}, $n \geq 1$, con topología como externología, así como para los discos, D^n, y teniendo en cuenta el cálculo de la homología singular usual de S^n, entonces,

Teorema 4.24 *Si $i > 0$,*

$$H_i^{\mathfrak{R}}(S^n) = \begin{cases} \oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z}, & i = n \\ \\ 0, & i \neq n \,, \end{cases} \qquad H_0^{\mathfrak{R}}(S^n) = \begin{cases} (\oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z}) \oplus (\oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z}), & n = 0 \\ \\ \oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z}, & n > 0\,. \end{cases}$$

Y, si $n \geq 1$:

$$H_i^{\mathfrak{R}}(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z}, & i = n \\ \\ 0, & i \neq n\,. \end{cases}$$

Los gCW complejos son espacios que se crean pegando discos o $\mathbb{N}$-discos por su borde, proceso que se describe a través de push-outs. Por esto es adecuado estudiar la siguiente situación:

Sean X, X^* espacios exteriores Hausdorff, tal que X^* es E-$C1$ y se obtiene de X a partir de un push-out de la forma

$$\begin{tikzcd} (\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{S}_\lambda^{n-1}) \coprod (\coprod_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma^{n-1}) \arrow[r, "(\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda) \coprod (\coprod_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma)"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, hook] \\ (\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{D}_\lambda^{n}) \coprod (\coprod_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma^{n}) \arrow[r, "(\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda) \coprod (\coprod_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma)"'] & X^*, \end{tikzcd}$$

con Λ y Γ finitos. Como la flecha vertical del coproducto de esferas en el coproducto de discos es inyectiva, cerrada y e-cerrada, se tiene que $X \hookrightarrow X^*$ es inyectiva, cerrada y e-cerrada, luego un encaje. Se puede, entonces, suponer sin pérdida de generalidad, que X es un subespacio exterior cerrado de X^*. En este caso se obtiene lo siguiente:

Proposición 4.25

$$H_i^{\mathfrak{R}}(X^*, X) \cong \begin{cases} (\oplus_\lambda \mathfrak{R}) \oplus (\oplus_\gamma(\oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z})), & i = n \\ \\ 0, & i \neq n\,. \end{cases}$$

Estamos en condiciones de dar la homología celular.

Definición 4.26 Se define el *complejo $\mathfrak{R}$-celular* de X como

$$C_n^{\mathfrak{R}cel}(X) = H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}),$$

con operador frontera la composición

$$H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

donde δ_* es el homomorfismo de conexión y j_{n-1} el inducido por la inclusión.

Para simplificar se denotará por (C, d). (C, d) es un complejo de cadenas de $\mathfrak{R}$-módulos. Si k_n, j_n denotan las inducidas en las inclusiones se considera el diagrama

$$H_n^{\mathfrak{R}}(X) \xleftarrow{k_n} H_n^{\mathfrak{R}}(X^n) \xrightarrow{j_n} H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}).$$

Teorema 4.27 *Sea X un gCW complejo con un número finito de celdas en cada dimensión. Entonces*

(i) k_n es epimorfismo;

(ii) j_n es monomorfismo;

(iii) $im(j_n) = ker(d_n)$, $ker(k_n) = j_n^{-1}(im(d_{n+1}))$.

Corolario 4.28 *$\theta_n = (j_n k_n^{-1}) : H_n^{\mathfrak{R}}(X) \to H_n(C)$ es un isomorfismo de $\mathfrak{R}$-módulos.*

Por tanto, para hallar los grupos de $\mathfrak{R}$-homología de X basta hallar los grupos de homología del complejo de cadenas de $\mathfrak{R}$-módulos, C.

5 Aplicaciones: Homologías tubulares.

Otros importantes invariantes de naturaleza homológica para los espacios exteriores son estudiados en esta sección: la homología tubular y la tubular cerrada. Se ven relaciones entre éstas y la homología singular clásica, así como que, para CW complejos localmente finitos y con un número contable de celdas en cada dimensión, K, su homología localmente finita coincide con la homología tubular cerrada de cierta estructura de gCW complejo para K, con lo cual, y como consecuencia inmediata, se podrá dar una relación de la homología reducida de Steenrod de un espacio métrico-compacto, X, con la homología tubular cerrada asociada a su complejo fundamental de Lefschetz.

5.1 Homología tubular.

Se considera la categoría $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$, de complejos de cadenas acotados inferiormente de grupos abelianos.

Definición 5.1 Dado X un objeto de $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$, se define su *cocilindro*, X^I, como,

$$\begin{aligned}&(X^I)_n = X_n \oplus X_{n+1} \oplus X_n,\\ &d_n^{X^I}(x,y,z) = (d_n^X(x), -d_{n+1}^X(y) + x - z, d_n^X(z)).\end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que es un objeto de $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$. Tomando $(d_0)_n$ y $(d_1)_n$ las proyecciones en la primera y tercera componente respectivamente, definen homomorfismos de complejos: $d_0, d_1 : X^I \to X$. Por otro lado, se define $s : X \to X^I$ como $s_n(x) = (x, 0, x)$, dando un homomorfismo de complejos. Entonces se tiene un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "{(id,id)}"] \arrow[dr, "s"'] & & X \times X \\ & X^I, \arrow[ur, "{(d_0,d_1)}"'] & \end{tikzcd}$$

con (d_0, d_1) fibración y s equivalencia débil en $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$, por lo que es un objeto cocilindro de X, en el sentido de categoría de modelos de Quillen (véase [35] y [8]). Dado $f : X \to Y$ un morfismo de $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$ se define su cocilindro, f^I, como $(f^I)_n = f_n \oplus f_{n+1} \oplus f_n$. Surge así, un funtor cocilindro,

$$(.)^I : \mathbf{Ch_{ai}Ab} \to \mathbf{Ch_{ai}Ab}.$$

Además, d_0, d_1 y s son transformaciones naturales. El funtor cocilindro transforma equivalencias débiles en equivalencias débiles. Si X es un complejo de cadenas positivo de $\mathfrak{R}$-módulos, se puede considerar $(sh)^* : X \to X$, dado como $(sh)^*_n(x) = x \cdot sh$, donde sh es el operador shift definido en [21]. Es sencillo comprobar que es un homomorfismo de complejos de cadenas positivo de grupos abelianos. Teniendo en cuenta la existencia del funtor canónico

$$\mathbf{Ch^+(\mathfrak{R}\text{-}Mod)} \to \mathbf{Ch^+Ab} \subset \mathbf{Ch_{ai}Ab},$$

entonces tiene sentido la siguiente definición:

Definición 5.2 Sea X un objeto de $\mathbf{Ch^+(\mathfrak{R}\text{-}Mod)}$. Se define el *complejo de cadenas tubular* de X, $P(X)$, como el obtenido en el siguiente pull-back en $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$:

$$\begin{tikzcd} P(X) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X^I \arrow[d, "{(d_0,d_1)}"] \\ X \arrow[r, "{(id,(sh)^*)}"'] & X \times X. \end{tikzcd}$$

Su descripción explícita es

$$\begin{aligned} P(X)_n &= X_n \oplus X_{n+1}, \\ d_n^{P(X)}(a,x) &= (d_n^X(a), -d_{n+1}^X(x) + a - a \cdot sh). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $f : X \to Y$ es un morfismo de $\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})$, se induce, por la propiedad universal del pull-back, un morfismo de $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$, $P(f) : P(X) \to P(Y)$, cuya expresión es $P(f)_n = f_n \oplus f_{n+1}$. Claramente define un funtor $P : \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathbf{Ch_{ai}Ab}$. Para cada pareja exterior (X, A), $C^{\mathfrak{R}}(X, A)$ es un complejo de cadenas positivo de $\mathfrak{R}$-módulos. Se denota por $P(X, A)$ a $P(C^{\mathfrak{R}}(X, A))$.

Definición 5.3 Sea (X, A) una pareja exterior, se define el *n-grupo de homología tubular* de (X, A), y se denotará por $H_n^P(X, A)$, como el del complejo $P(X, A)$.

De modo natural, si $f : (X, A) \to (Y, B)$ es un morfismo de parejas exteriores se define $H_n^P(f) : H_n^P(X, A) \to H_n^P(Y, B)$, dando lugar, para cada $n \in \mathbb{Z}$ un funtor $H_n^P : \mathbf{E^{(2)}} \to \mathbf{Ab}$.

Teorema 5.4 *Sea (X, A) una pareja exterior, entonces existe una sucesión exacta larga en homología tubular,*

$$\cdots \longrightarrow H_n^P(A) \xrightarrow{i_*} H_n^P(X) \xrightarrow{j_*} H_n^P(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^P(A) \longrightarrow \cdots,$$

donde i_*, j_* son las inducidas en las correspondientes inclusiones.

También se tiene la invarianza homotópica:

Teorema 5.5 *Sean $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ morfismos en $\mathbf{E^{(2)}}$ homótopos exteriormente. Entonces $H_n^P(f) = H_n^P(g)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

La homología tubular verifica también el teorema de escisión:

Teorema 5.6 *Sea (X, A) una pareja exterior, con X E-C1, y sea U un abierto de X con $Cl_X(U) \subset Int_X(A)$. Entonces $i : (X\text{-}U, A\text{-}U) \hookrightarrow (X, A)$, la inclusión, induce isomorfismo en homología tubular, es decir,*

$$H_n^P(i) : H_n^P(X\text{-}U, A\text{-}U) \to H_n^P(X, A)$$

es isomorfismo de grupos, para cada n.

Y la aditividad finita:

Teorema 5.7 *Sea $\{X^i\}_{i=1}^m$ una colección finita de espacios exteriores. Entonces existe un isomorfismo natural,*

$$H_n^P(\textstyle\coprod_{i=1}^m X^i) \cong \oplus_{i=1}^m H_n^P(X^i).$$

Recordamos ahora la descripción del funtor derivado del funtor límite inverso.

Definición 5.8 Sea

$$G_0 \xleftarrow{p_0} G_1 \xleftarrow{p_1} G_2 \xleftarrow{p_2} G_3 \longleftarrow \cdots$$

un sistema inverso de grupos abelianos. Se considera el homomorfismo de grupos $d : \prod_{i=0}^{\infty} G_i \to \prod_{i=0}^{\infty} G_i$ dado por $d(g_0, g_1, g_2, ...) = (g_0 - p_0(g_1), g_1 - p_1(g_2), g_2 - p_2(g_3), ...)$. Entonces el *límite inverso* es $lim\, \{G_i, p_i\} = ker(d)$, y el *límite derivado*, $lim^1\, \{G_i, p_i\} = coker(d)$.

Por simplificar notación y siempre que no haya lugar a confusión, se omiten los homomorfismos de transición, p_i. De forma canónica se definen lim y lim^1 para morfismos de sistemas inversos de grupos abelianos. Dos importantes propiedades concernientes al funtor lim^1 son las siguientes:

(i) Si cada $p_i : G_{i+1} \to G_i$ es un epimorfismo, entonces $lim^1\ \{G_i\} = 0$;

(ii) Los límites inversos y derivados de una sucesión exacta corta de sistemas inversos de grupos abelianos,

$$0 \longrightarrow \{G_i\} \longrightarrow \{H_i\} \longrightarrow \{K_i\} \longrightarrow 0,$$

están relacionados por una sucesión exacta larga de grupos abelianos,

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow lim\,\{G_i\} \longrightarrow lim\,\{H_i\} \longrightarrow lim\,\{K_i\} \\ \longrightarrow lim^1\,\{G_i\} \longrightarrow lim^1\,\{H_i\} \longrightarrow lim^1\,\{K_i\} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Supóngase X un espacio exterior E-C1, y

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$$

una base exterior. Sea $i_k : E_{k+1} \hookrightarrow E_k$ la inclusión canónica correspondiente y dado $q \in \mathbb{Z}$, $p_k : H_q(E_{k+1}) \to H_q(E_k)$ su inducida en los grupos de homología singular. Entonces se tiene, para cada q, un sistema inverso de grupos abelianos,

$$H_q(E_0) \xleftarrow{p_0} H_q(E_1) \xleftarrow{p_1} H_q(E_2) \xleftarrow{p_2} H_q(E_3) \longleftarrow \cdots$$

Teorema 5.9 *Existe, para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,*

$$0 \longrightarrow lim^1\,\{H_{q+1}(E_i)\} \longrightarrow H_q^P(X) \longrightarrow lim\,\{H_q(E_i)\} \longrightarrow 0.$$

El siguiente resultado es la versión del teorema anterior para el caso no absoluto:

Teorema 5.10 *Sea (X, A) una pareja exterior, X E-C1, y*

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$$

una base exterior de X. Entonces, si se denota por $E_i' = E_i \cap A$, existe, para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow lim^1\,\{H_{q+1}(E_i, E_i')\} \longrightarrow H_q^P(X, A) \longrightarrow lim\,\{H_q(E_i, E_i')\} \longrightarrow 0.$$

La $\mathfrak{R}$-homología y la homología tubular están relacionadas mediante una sucesión exacta larga.

Teorema 5.11 *Sea X un espacio exterior. Existe una sucesión exacta larga de la forma:*

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}^{\mathfrak{R}}(X) \longrightarrow H_q^P(X) \longrightarrow H_q^{\mathfrak{R}}(X) \longrightarrow H_q^{\mathfrak{R}}(X) \longrightarrow \cdots$$

Se tiene también el resultado para el caso relativo.

El teorema 5.9 anterior es útil para el cálculo de homología tubular, en concreto se puede calcular sin problemas la homología tubular del espacio exterior $\mathbb{N}$. Claramente, $\{\mathbb{N}(i)\}_{i=0}^{\infty}$ es una base exterior que está en las condiciones de dicho teorema.

Teorema 5.12

$$H_q^P(\mathbb{N}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z} / \oplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & q = -1 \\ 0, & q \neq -1\ . \end{cases}$$

Una propiedad curiosa de la homología tubular surge cuando la externología considerada es la propia topología.

Proposición 5.13 *Sea X un espacio exterior tal que $\varepsilon_X = \tau_X$. Entonces $H_n^P(X) \cong 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Se deduce que, si X es un espacio topológico compacto, entonces $H_n^P(X_e) \cong 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.
De forma similar se tiene para el caso relativo, con parejas exteriores compactas.

5.2 Homología tubular cerrada.

Variando un poco el complejo de cadenas tubular de un espacio exterior, se obtiene un subcomplejo suyo, el complejo tubular cerrado, dando lugar a otro importante invariante homológico: la homología tubular cerrada. Se darán, primeramente, unas consideraciones algebraicas antes de dar su definición.

Definición 5.14 Sea X un complejo de cadenas positivo de grupos abelianos exteriores. El *complejo de cadenas tubular cerrado* de X, $Q(X)$, es el complejo de cadenas acotado inferiormente de grupos abelianos siguiente:

$$\begin{array}{l} Q(X)_n = \{(a,x) \in Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, X_n) \oplus Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, X_{n+1}) : a_0 = 0\}, \\ d_n^{Q(X)}(a,x) = ((d_n^X)_*(a), -(d_{n+1}^X)_*(x) + a - a \cdot sh). \end{array}$$

Nota: Obsérvese que, $Q(X)_n = \{(a,x) \in P(Ch^+(\mathcal{P})(X))_n : a_0 = 0\}$, siendo $d_n^{Q(X)}$ la restricción de $d_n^{P(Ch^+(\mathcal{P})(X))}$ a $Q(X)_n$.

Evidentemente, $Q(X)$ es subcomplejo de $P(X) \equiv P(Ch^+(\mathcal{P})(X))$, la inclusión $i : Q(X) \hookrightarrow P(X)$ es homomorfismo de complejos de cadenas acotados inferiormente de grupos abelianos. Si $f : X \to Y$ es un morfismo de complejos de grupos abelianos exteriores se considera $Q(f) : Q(X) \to Q(Y)$ dada por $Q(f)_n = ((f_n)_*(a), (f_{n+1})_*(x))$, es decir, $P(f)_n|Q(X)_n$.

Si (X, A) es una pareja de complejos de cadenas positivos de grupos abelianos exteriores se considera $Q(X, A) = Q(X/A) \subset P(X, A)$. De forma natural se define para $f : (X, A) \to (Y, B)$ morfismo de parejas correspondiente, dando lugar a un funtor: $Q : \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E\text{-}Ab})^{(\mathbf{2})} \to \mathbf{Ch_{ai}Ab}$.

Si (X, A) es una pareja de espacios exteriores, se denotará por $Q(X, A)$ al complejo $Q(D(X), D(A)) = Q(D(X)/D(A))$. Aquí $D(X)$ es el complejo singular $C(X)$ de forma que en cada nivel $C(X)_n$, tiene la externología generada por $\{C(E)_n : E \in \varepsilon_X\}$. Si no hay lugar lugar a ambigüedad, a veces se denota $D(X) = C(X)$ y $D(X, A) = C(X, A)$. Se define de forma natural $Q(f) : Q(X, A) \to Q(Y, B)$ para parejas.

Definición 5.15 Sea (X, A) una pareja de espacios exteriores. Se define su *n-grupo de homología tubular cerrada*, $H_n^Q(X, A)$, como el del complejo $Q(X, A)$.

Si $f : (X, A) \to (Y, B)$ es un morfismo de parejas de espacios exteriores se define de forma canónica $H_n^Q(f) : H_n^Q(X, A) \to H_n^Q(Y, B)$, originando un funtor para cada $n \in \mathbb{Z} : H_n^Q : \mathbf{E^{(2)}} \to \mathbf{Ab}$.

Es sencillo comprobar que si (X, A) es una pareja exterior entonces existe un isomorfismo natural $Q(X, A) \cong Q(X)/Q(A)$. Por consiguiente:

Teorema 5.16 *Sea (X, A) una pareja exterior. Entonces existe una sucesión exacta larga en homología tubular cerrada,*

$$\cdots \longrightarrow H_n^Q(A) \xrightarrow{i_*} H_n^Q(X) \xrightarrow{j_*} H_n^Q(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^Q(A) \longrightarrow \cdots$$

Se da también la invarianza homotópica:

Teorema 5.17 *Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones exteriores homótopas. Entonces*

$$H_n^Q(f) = H_n^Q(g), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La homología tubular, tubular cerrada y la singular están relacionadas por una sucesión exacta larga:

Teorema 5.18 *Sea X un espacio exterior. Existe una sucesión exacta larga,*

$$\cdots \longrightarrow H_n^Q(X) \longrightarrow H_n^P(X) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}^Q(X) \longrightarrow \cdots$$

Como consecuencia inmediata si X es un espacio exterior tal que $\varepsilon_X = \tau_X$ entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $H_n^Q(X) \cong H_{n+1}(X)$. En particular, si X es un espacio topológico compacto, $H_n^Q(X_e) \cong H_{n+1}(X), \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Existe también la versión para el caso relativo.

También la homología tubular cerrada verifica el teorema de escisión.

Teorema 5.19 *Sea (X, A) una pareja exterior, con X E-C1, y sea U un abierto de X con $Cl_X(U) \subset Int_X(A)$. Entonces $i : (X\text{-}U, A\text{-}U) \hookrightarrow (X, A)$, la inclusión, induce isomorfismo en homología tubular cerrada, es decir,*

$$H_n^Q(i) : H_n^Q(X\text{-}U, A\text{-}U) \to H_n^Q(X, A)$$

es isomorfismo de grupos, para cada n.

Y la aditividad finita:

Teorema 5.20 *Si $\{X^i\}_{i=1}^m$ es una colección de espacios exteriores, entonces*

$$H_n^Q(\textstyle\coprod_{i=1}^m X_i) \cong \oplus_{i=1}^m H_n^Q(X_i).$$

Como en la homología tubular, existe un teorema similar útil para cálculos.

Teorema 5.21 *Sea X un espacio exterior E-C1, y sea*

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

una base exterior. Existe, para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow lim^1 \{H_{q+1}(X, E_i)\} \longrightarrow H_{q-1}^Q(X) \longrightarrow lim \{H_q(X, E_i)\} \longrightarrow 0.$$

Para el caso relativo, si (X, A) es una pareja exterior, X E-C1 y $\{E_i\}_{i=0}^\infty$ una base exterior tal que $E_0 = X$ y $E_n \supset E_{n+1}$, para cada n, si se denota por $\tilde{E_i} = A \cup E_i$, entonces existe para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow lim^1 \{H_{q+1}(X, \tilde{E_i})\} \longrightarrow H_{q-1}^Q(X, A) \longrightarrow lim \{H_q(X, \tilde{E_i})\} \longrightarrow 0.$$

Haciendo uso de esta herramienta se calcula la homología tubular cerrada de $\mathbb{N}$:

Teorema 5.22

$$H_q^Q(\mathbb{N}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^\infty \mathbb{Z}, & q = -1 \\ 0, & q \neq -1 \end{cases}$$

Así como el siguiente caso:

Proposición 5.23 *Sea $\{(X_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección contable de parejas de espacios compactos. Si en los coproductos,*

$$\textstyle\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \ \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda,$$

se consideran las externologías de los complementos de sus compacto-cerrados, entonces

$$H_n^Q(\textstyle\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} H_{n+1}(X_\lambda, A_\lambda), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En esta sección se comprueba la importancia de la homología tubular cerrada viéndose una relación directa con la homología de Steenrod de los espacios métrico-compactos. Las homologías tubular y tubular cerrada tienen las propiedades necesarias para repetir los argumentos hechos en los gCW complejos con un número finito de celdas en cada dimensión para la $\mathfrak{R}$-homología. Unicamente varían los grupos de coeficientes y en unos casos un salto de dimensión. Se introduce ahora, a semejanza de la $\mathfrak{R}$-homología reducida, la homología tubular cerrada reducida.

Definición 5.24 Sea (i_X, X, r_X) un objeto de $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. Se define

$$\tilde{H}^Q_n(X) = ker(H^Q_n(X) \xrightarrow{(r_X)_*} H^Q_n(\mathbb{N})).$$

Dada $f : (i_X, X, r_X) \to (i_Y, Y, r_Y)$, se induce un homomorfismo de grupos $\tilde{H}^Q_n(f) : \tilde{H}^Q_n(X) \to \tilde{H}^Q_n(Y)$. Para $n > 0$, entonces $H^Q_n(\mathbb{N}) = 0$, por lo que $\tilde{H}^Q_n(X) = H^Q_n(X)$. Si (X, A) es una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, se define $\tilde{H}^Q_n(X, A) = H^Q_n(X, A)$. Si $f : X \to Y$ es exterior, en $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, con $f(A) \subset B$ se define $\tilde{H}^Q_n(f) = H^Q_n(f)$.

Teorema 5.25 *Sea (X, A) una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. Entonces existen morfismos i_*, j_* y δ_* tales que la siguiente sucesión es exacta larga:*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}^Q_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}^Q_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}^Q_n(X, A) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}^Q_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Se establece la invarianza homotópica:

Teorema 5.26 *Sean $f, g : (i_X, X, r_X) \to (i_Y, Y, r_Y)$ homótopas exteriormente. Entonces $\tilde{H}^Q_n(f) = \tilde{H}^Q_n(g)$, $n \geq 0$.*

Haciendo uso, básicamente de la escisión, entre otras propiedades:

Proposición 5.27
(i) $\tilde{H}^Q_{i+1}(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n) \cong \tilde{H}^Q_i(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$;
(ii) $\tilde{H}^Q_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}) \cong \tilde{H}^Q_i(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Obtenemos así, como consecuencia:

Teorema 5.28

$$\tilde{H}^Q_i(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & i = n-1 \\ 0, & i \neq n-1, \end{cases} \qquad H^Q_{-1}(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} (\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}) \oplus (\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}), & n = 0 \\ \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & n > 0. \end{cases}$$

Si $n \geq 1$:

$$H^Q_i(\mathfrak{D}^n, \mathfrak{S}^{n-1}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & i = n-1 \\ 0, & i \neq n-1 \,. \end{cases}$$

Por el cálculo de la homología singular usual de S^n y (D^n, S^{n-1}) :
Si $i > 0$,

$$H^Q_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n-1 \\ 0, & i \neq n-1 \,, \end{cases} \qquad H^Q_{-1}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}, & n > 0 \,. \end{cases}$$

Y, si $n \geq 1$:

$$H^Q_i(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n-1 \\ 0, & i \neq n-1 \,. \end{cases}$$

Dados X^* y X espacios exteriores como en el resultado 4.25, entonces

$$H_i^Q(X^*, X') \cong (\oplus_{\lambda\in\Lambda} H_i^Q(\mathfrak{D}_\lambda^n, \mathfrak{S}_\lambda^{n-1})) \oplus (\oplus_{\gamma\in\Gamma} H_i^Q(D_\gamma^n, S_\gamma^{n-1})),$$

por lo que

$$H_i^Q(X^*, X) \cong \begin{cases} (\oplus_\lambda(\prod_{i=0}^\infty \mathbb{Z}) \oplus (\oplus_\gamma \mathbb{Z})), & i = n-1 \\ \\ 0, & i \neq n-1 \,. \end{cases}$$

Definición 5.29 Sea X un gCW complejo con un número finito de celdas en cada dimensión. Se define el complejo celular tubular cerrado, $C^{Qcel}(X)$, como

$$C_n^{Qcel}(X) = H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}),$$

con operador borde, $d_n^{C^{Qcel}(X)}$, la composición

$$H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-2}^Q(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-2}^Q(X^{n-1}, X^{n-2}).$$

Entonces el n-grupo de homología de dicho complejo es isomorfo al grupo de homología tubular cerrada de X de dimensión n-1. Supóngase ahora un CW complejo, X, localmente finito y con un número contable de celdas en cada dimensión. Se considera en cada objeto del diagrama push-out en **Top** la externología de los complementos de sus compacto-cerrados,

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\lambda\in A_n} S_\lambda^{n-1} \arrow[r, "\coprod_{\lambda\in A_n} g_\lambda^n"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d, hook, "i_n"] \\ \coprod_{\lambda\in A_n} D_\lambda^n \arrow[r, "\coprod_{\lambda\in A_n} f_\lambda^n"'] & X^n. \end{tikzcd}$$

Entonces es un push-out en **E**; así, si X tiene dimensión finita, X_e es un gCW complejo (nótese que si hay un número numerable de n-celdas entonces se puede considerar como una sola $\mathbb{N}$-celda de dimensión n.) Para el caso general, la externología considerada en X será la del colímite. Se denotará este gCW complejo por $\hat{X}$. Obsérvese que

$$H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}) \cong \prod_{\lambda\in A_n} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \cong \prod_{\lambda\in A_n} H_n(\overline{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n),$$

donde $e_\lambda^n = f_\lambda^n(Int(D_\lambda^n))$, $\overline{e}_\lambda^n = f_\lambda^n(D_\lambda^n)$ y $\dot{e}_\lambda^n = \overline{e}_\lambda^n$-$e_\lambda^n$.

Como es conocido, la homología celular localmente finita de X, orientado, es la homología del complejo $C^{lfcel}(X)$, definido como $C_n^{lfcel}(X) = \prod_{\lambda\in A_n} H_n(\overline{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n)$, con operador borde

$$d_n^{lfcel}(\{c_\lambda^n\}_{\lambda\in A_n}) = \{(\textstyle\sum_{\lambda\in A_n}[e_\lambda^n : e_\mu^{n-1}]w_\lambda^n)a_\mu^{n-1}\}_{\mu\in A_{n-1}},$$

donde a_λ^n es el generador del grupo cíclico infinito $H_n(\overline{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n)$, es decir, la orientación de e_λ^n (véase capítulo 4 de [31]), $c_\lambda^n = w_\lambda^n a_\lambda^n$, $w_\lambda^n \in \mathbb{Z}$ y $[e_\lambda^n : e_\mu^{n-1}]$ denota el número de incidencia de la n-celda e_λ^n respecto de la (n-1)-celda e_μ^{n-1}. Nótese que, por el isomorfismo $H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \cong H_n(\overline{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n)$, se puede dar una definición alternativa de la homología celular localmente finita de $X : C_n^{lfcel}(X) = \prod_{\lambda\in A_n} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1})$, siendo el operador borde, $d_n^{lfcel}(\{(c')_\lambda^n\}_{\lambda\in A_n}) = \{(\sum_{\lambda\in A_n}[e_\lambda^n : e_\mu^{n-1}](w')_\lambda^n)(a')_\mu^{n-1}\}_{\mu\in A_{n-1}}$, con $(a')_\lambda^n$ el generador de $H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1})$, que se corresponde con a_λ^n y $(c')_\lambda^n = (w')_\lambda^n(a')_\lambda^n$, $(w')_\lambda^n \in \mathbb{Z}$. Además, existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "d_n^{Qcel}"'] & \prod_{\lambda\in A_n} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \arrow[d, "-d_n^{lfcel}"] \\ H_{n-2}^Q(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[r, "\cong"'] & \prod_{\mu\in A_{n-1}} H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2}). \end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta todos estos razonamientos:

Teorema 5.30 *Si X es un CW complejo localmente finito, con un número contable de celdas en cada dimensión, entonces*

$$H^Q_{n-1}(\hat{X}) \cong H_n(C^{lfcel}(X)), \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Y, como consecuencia:

Teorema 5.31 *Sea X es un espacio métrico compacto. Entonces*

$$H^Q_n(\widehat{OFC(X)}) \cong \tilde{H}^{st}_n(X), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Es decir, la homología reducida de Steenrod de X ([37]) es isomorfa a la homología tubular cerrada de $\widehat{OFC(X)}$ donde $OFC(X)$ denota el complejo fundamental de Lefschetz de X ([19]).

Referencias

[1] M. Artin and B. Mazur. *Etale Homotopy.* Lect. Notes in Math. **100** (1969).

[2] H.J. Baues. *Algebraic homotopy.* Cambridge Univ. Press, 1988.

[3] H.J. Baues. *Foundations of proper homotopy theory.* Preprint 1992.

[4] D. Bassendoski. *Whitehead and Hurewicz theorems in proper homotopy theorey.* Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 1977.

[5] M. Beattie. About Moore spaces. *Proc. Workshop on Proper Homotopy Theory., Universidad de La Rioja*, 1991.

[6] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra.* Encyclopedia of Math. and its applications. Cambridge University Press. Vol. **50**,**51** (1994).

[7] Bousfield and D.M. Kan. *Homotopy limits, Completions and Localizations.* Lect. Notes in Math. **304** (Springer-Verlag), 1972.

[8] J. Cabeza. Homologías y cohomologías propias y de la forma. *Universidad de Zaragoza.* Tesis (1995).

[9] A. Dold. Homology of symmetric products and other functors of complexes. *Annal of Math*, **68** (1958), 54-80.

[10] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology.* Springer-Verlag, 1972.

[11] A. Dold and D. Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier.* **11** (1961), 201-312.

[12] D. Edwards and H. Hastings. Čech *and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology.* Lect. Notes Math. **542** (Springer, 1976).

[13] S. Eilenberg and S. Mac Lane. On the groups $H(\prod, n)$, I. *Ann. of Math.* **58** (1953), 55-106.

[14] S. Eilenberg and N. Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton Univ. Press, 1952.

[15] J.I. Extremiana, L.J. Hernández and M.T. Rivas. Proper CW complexes: A category for the estudy of proper homotopy. *Collectanea Math.* **39** (1988), 149-179.

[16] J.I. Extremiana, L.J. Hernández and M.T. Rivas. An isomorphism theorem of the Hurewicz type in the proper homotopy category. *Fund. Math.* **132** (1989), 195-214.

[17] F.T. Farrel and J. Wagoner. Infinite matrices in algebraic K-theory and topology. *Comm. Math. Helv.* **47** (1972), 474-501.

[18] F.T. Farrel and J. Wagoner. Algebraic torsion for infinite simple homotopy types. *Comm. Math. Helv.* **47** (1972), 502-513.

[19] S.C. Ferry. Remarks on Steenrod homology. *Proc. 1993 Oberwolfach Conf. on the Novikov Conjectures, and Index Theorems and Rigidity.* Vol 2, L.M.S. Lecture Notes **227**, 148-166, Cambridge (1995).

[20] J. García-Calcines, M. García-Pinillos and L.J. Hernández. A closed simplicial model category for proper homotopy and shape theories. *Bull. Austr. Math. Soc.* **57**, 221-242, (1998).

[21] J. García Calcines, L.J. Hernández y S. Rodríguez Machín. Homotopía propia simplicial I. *Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza.*

[22] M. García-Pinillos. El estudio del infinito a través del espacio exterior. *Univ. de La Rioja.* Tesis (1998).

[23] A.R. Garzón and J.G. Miranda. Homotopy theory for truncated weak equivalences of simplicial groups. *Math. Proc. Camb. Ph. Soc.* **121** n1 (1997), 51-74.

[24] M. Golasiński and G. Gromadzki. The homotopy category of chain complexes is a homotopy category. *Coll. Math.* **XLVII** (1982), 173-178.

[25] L.J. Hernández. Applications of simplicial M-Sets to proper and strong shape theories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347** (1995), 363-409.

[26] L.J. Hernández. Functorial and algebraic properties of Brown's $\mathcal{P}$ functor. *Theory and Applications of Categories.* Vol **1** (1995), 1-44.

[27] P.J. Hilton and U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra.* Springer GTM 4, New York, (1971).

[28] B. Hughes and A. Ranicki. *Ends of complexes.* Cambridge Univ. Press, 1996.

[29] S. Lefschetz. *Topology.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. New York, 1930.

[30] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* (Springer-Verlag, 1971).

[31] W.S. Massey. *Singular homology theory.* GTM 70 Springer (1980).

[32] C.R.F. Maunder. *Algebraic Topology.* Van Nostrand (1970).

[33] J. Milnor. On the Steenrod homology theory. *Proc. 1993 Oberwolfach Conf. on the Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity.* Vol 1, L.M.S. Lecture Notes **226**, 79-96, Cambridge (1995).

[34] J.C. Moore. *Seminar on algebraic homotopy theory.* Princeton (1956).

[35] D. Quillen. *Homotopical Algebra.* Lect. Notes in Math. **43** (Springer, 1967).

[36] E. Spanier. *Algebraic Topology.* Mc. Graw-Hill, 1966.

[37] N.E. Steenrod. Regular cycles of compact metric spaces. *Ann. of Maths.* **41** (1940), 833-851 .

[38] R.M. Switzer. *Algebraic Topology, Homotopy and Homology*. Die Grundlehren der Matematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band 212 (1971).

[39] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley (1970).