

Conditions algébriques entraînant la propriété Q -algèbre

R. Choukri and A. Najmi

École Normale Supérieure, Département de Mathématiques,
B.P.5118, Takaddoum, Rabat, 10105, Maroc.

E-mail: rchoukri@hotmail.com, najmiabdelhak@yahoo.fr

Abstract

We give algebraic conditions implying the Q -property in topological algebras.

Mots clés: algèbre algébrique, algèbre noethérienne, algèbre factorielle, m -convexité, F -algèbre, Q -algèbre.

MSC: 46H05, 46J20

1 Introduction

Il est bien connu que dans une Q -algèbre topologique, le spectre de tout élément est borné. De même, on sait que dans une Q -algèbre normée commutative, et plus généralement dans une algèbre normée bilatérale, et unitaire, tout idéal maximal est de codimension 1. Par ailleurs, une Q -algèbre topologique cyclique, (i.e., peut être engendrée par un seul élément), est de dimension finie. Il s'agit là de propriétés algébriques découlant de la propriété Q -algèbre. Dans cette note, nous nous intéressons au problème inverse. Plus précisément, nous donnons des conditions algébriques entraînant la propriété Q -algèbre. Certaines de ces conditions (Radicale, Produit fini de corps) ont un caractère “universel”, i.e., elles entraînent la propriété Q -algèbre quelle que soit la nature de la topologie. D'autres, (algébricité, noethérianité, artinianité, factorialité, semi-localité) l'entraînent seulement dans certaines classes d'algèbres topologiques.

2 Préliminaires

Soit A une algèbre. Un élément x de A est dit quasi-inversible s'il existe $y \in A$ tel que $x \circ y := x + y - xy = x + y - yx = 0$; ce qui équivaut à dire, dans le cas unitaire, que $e - x$ est inversible; où e est l'unité de A . L'ensemble de tels éléments est noté $G_q(A)$. Dans le cas unitaire, le groupe des éléments inversibles de A est noté $G(A)$.

L'algèbre A est dite bilatérale si $Ax = xA$, pour tout $x \in A$ ([4], p.704). Elle est dite semi-locale si elle est commutative, unitaire et n'admet qu'un nombre fini d'idéaux maximaux. Une algèbre est dite noethérienne (resp. artinienne) si la famille de ses idéaux à gauche satisfait la condition de la chaîne ascendante (resp. descendante) pour l'inclusion. Une algèbre commutative intègre est dite factorielle si tout élément non nul et non inversible se décompose de façon unique en un produit fini d'éléments irréductibles ([1], Proposition 2, p.228).

Soit τ une topologie d'algèbre sur A i.e., une topologie d'espace vectoriel pour laquelle le produit est séparément continu. On dit que (A, τ) est:

1. Une F -algèbre si τ est métrisable complète
2. *Localement convexe* (*a.l.c.*, en abrégé) si τ peut être définie par une famille de semi-normes.
3. *Localement multiplicativement convexe*, qu'on notera *a.l.m.c.*, si τ peut être définie par une famille de semi-normes sous-multiplicatives.
4. *Advertiblement complète*, toutes les fois qu'une suite généralisée de Cauchy $(x_\lambda)_\lambda$, laquelle est advertiblement nulle dans A , dans le sens que: $x_\lambda o y \longrightarrow 0 \longleftarrow y o x_\lambda$, pour un certain $x \in A$, converge dans A , d'où sa limite est évidemment le quasi-inverse de x .
5. De Fréchet, si c'est une F -algèbre qui est en plus une *a.l.m.c.*.
6. Une Q -algèbre si l'ensemble de ses éléments quasi-inversibles est ouvert; ce qui équivaut à dire, dans le cas unitaire, que le groupe des éléments inversibles est ouvert.

Toutes les algèbres considérées sont supposées complexes.

3 Conditions algébriques entraînant la propriété Q - algèbre

Il est clair que la finitude de la dimension est à caractère "universel" (En fait, une algèbre de dimension finie est de Banach). La proposition suivante, dont la preuve est facile, donne deux autres conditions ayant ce caractère.

Proposition 1 *Soit A une algèbre. Alors (A, τ) est une Q -algèbre, pour toute topologie d'algèbre τ , dans chacun des cas suivants:*

1. A est radicale.
2. A est un produit fini d'algèbres qui sont des corps.

Remarque 1 Une algèbre topologique qui est un produit infini d'algèbres qui sont des corps n'est pas nécessairement une Q -algèbre. En effet, l'algèbre $\mathbb{C}^N$ des suites complexes, munie de la topologie produit n'est pas une Q -algèbre. En fait, elle ne peut être munie d'aucune topologie de Q -algèbre vu qu'elle contient des éléments à spectre non borné.

Le résultat suivant établit une réciproque de la proposition précédente.

Proposition 2 Soit A une algèbre commutative unitaire semi-simple qui est une Q -algèbre pour toute topologie d'algèbre. Alors, tout idéal premier de A est maximal. Si, de plus, A est noethérienne, elle est isomorphe à un produit fini d'algèbres qui sont des corps.

Preuve. Soit $(M_i)_{i \in I}$ la famille des idéaux maximaux de A . Si I est réduit à un seul élément, alors l'algèbre est un corps vu qu'elle est semi-simple. Supposons maintenant que I n'est pas un singleton. Considérons $i_0 \in I$ et posons $L = \bigcap_{i \neq i_0} M_i$. Supposons que L est nul. On munit A de la topologie définie par la famille de semi-normes $(p_{i,f})_{i \in I \setminus \{i_0\}, f \in (A/M_i)^*}$, avec $p_{i,f}(x) = |f(s_i(x))|$, pour tout $x \in A$, où s_i est la surjection canonique de A sur A/M_i et $(A/M_i)^*$ est le dual algébrique de A/M_i . Remarquons que, pour tous $i \in I$ et $f \in (A/M_i)^*$, le noyau de $p_{i,f}$ contient l'idéal M_i . Montrons qu'il existe J fini contenu dans $I \setminus \{i_0\}$ tel que M_{i_0} contient $\bigcap_{j \in J} M_j$. Dans le cas contraire, pour toute partie finie J de $I \setminus \{i_0\}$, il existe $x_J \in \bigcap_{j \in J} M_j$ et $x_J \notin M_{i_0}$. On a alors $M_{i_0} + Ax_J = A$. Donc, il existe $a_J \in A$ et $m_J \in M_{i_0}$ tel que $e = m_J + a_J x_J$. Or la suite généralisée $(a_J x_J)_J$ converge vers zéro, et donc la suite $(m_J)_J$ converge vers e , ce qui est impossible vu que M_{i_0} est fermé. Ainsi, il existe J fini contenu dans $I \setminus \{i_0\}$ tel que M_{i_0} contient $\bigcap_{j \in J} M_j$. Par suite, il existe $j \in J$ tel que $M_{i_0} = M_j$; ce qui ne peut être le cas. Donc nécessairement L est non nul. De plus, on a $M_{i_0} \cap L = \{0\}$. Comme A n'admet pas d'éléments nilpotents non nuls, vu qu'elle est semi-simple, il existe un idéal premier minimal P de A ne contenant pas L ; l'idéal P contient alors M_{i_0} et par suite $P = M_{i_0}$. Supposons maintenant que A est, de plus, noethérienne. Par ([5], Théorème IV.4, p.66), A est artinienne. On conclut par ([5], Corollaire, p.67). ■

Proposition 3 Soit A une algèbre unitaire algébrique. Alors A est une Q -algèbre pour toute topologie définie par une norme d'algèbre.

Preuve. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur A . Considérons $x \in A$ tel que $\|e - x\| < 1$. La sous-algèbre $\mathbb{C}[e, x]$ de A , engendrée par $\{e, x\}$, est de dimension finie. Donc c'est une algèbre de Banach. D'où l'inversibilité de x dans $\mathbb{C}[e, x]$, et par suite dans A . ■

Remarque 2 Une algèbre algébrique A -normée, (i.e., dont la topologie est définie par une norme d'espace vectoriel), n'est pas nécessairement une Q -algèbre comme le montre l'exemple suivant: Soit A l'algèbre des suites complexes nulles à partir d'un certain rang munie de la norme: $\|(x_n)_n\| = \sum_{n \geq 0} |x_n|/(n+1)$. Il est clair que le produit est séparément continu. De plus, A est algébrique. Cependant, A n'est pas une Q -algèbre. En effet, supposons le contraire. Il existe alors une constante $K > 0$ tel que $\rho(x) \leq K\|x\|$, pour tout $x \in A$, où $\rho(x)$ désigne le rayon spectral de x dans A . Pour un entier m non nul, considérons l'élément $(x_n^m)_n$ de A , où $x_n^m = m\delta_{m,n}$, le symbole $\delta_{m,n}$ étant celui de Kronecker. Alors on a: $1 \leq K/n$, pour tout n . Ce qui ne peut être le cas.

Une condition algébrique moins forte que l'algébricité est la finitude du spectre. La question suivante se pose alors: Une algèbre normée dont le spectre de tout élément est fini est-elle nécessairement une Q -algèbre? La réponse est négative. Dans la remarque ci-dessous, nous donnons un exemple d'une algèbre normée commutative dont le spectre de tout élément contient au plus deux points et qui n'est pas une Q -algèbre.

Remarque 3 Soit B une algèbre de Banach commutative unitaire intègre non semi-simple et $x \in \text{Rad} B$ non nul (par exemple, l'unitisée de l'algèbre de convolution $L^1[0,1]$). Soit A la sous-algèbre de B engendrée par la partie $\{x, (x - \lambda e)^{-1}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}\}$. L'algèbre A n'admet que deux idéaux maximaux; et donc le spectre de tout élément de A contient au plus deux points. En particulier, $Sp_A x = \{0,1\}$. Par ailleurs, $\rho_{\tilde{A}}(x) = \rho_B(x)$, où $\tilde{A}$ est la complétée de A . Comme x est dans le radical de B , $\rho_B(x) = 0$. Il en résulte que $Sp_{\tilde{A}}(x) = \{0\} \neq Sp_A(x)$. Donc A n'est pas une Q -algèbre. Notons à ce propos, qu'une algèbre normée dont le spectre de tout élément est réduit à un seul point est une Q -algèbre.

Moyennant le théorème de Gelfand-Mazur, on montre que dans une Q -algèbre m -convexe bilatérale et unitaire tout idéal maximal est de codimension 1. Voici une réciproque de ce résultat. Mais donnons d'abord le lemme suivant dont la preuve ne présente aucune difficulté.

Lemme 4 Soit A une algèbre topologique unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. A est une Q -algèbre.
2. $\text{Rad}(A)$ est fermé et $A/\text{Rad}(A)$ est une Q -algèbre, où $\text{Rad}(A)$ désigne le radical de Jacobson de A .

Proposition 5 Soit A une algèbre bilatérale unitaire dans laquelle tout idéal maximal est de codimension 1. Alors A est une Q -algèbre, pour toute topologie d'a.l.m.c. de Fréchet.

Preuve. Soit τ une topologie d'a.l.m.c. de Fréchet sur A et $\tilde{\tau}$ la topologie quotient de $A/\text{Rad}(A)$, où $\text{Rad}(A)$ est le radical de Jacobson de A . L'algèbre $(A/\text{Rad}(A), \tilde{\tau})$ est une a.l.m.c. de Fréchet. De plus, elle est commutative. D'après ([9], Corollaire 3, p.296), elle est une Q -algèbre. D'où, via le lemme ci-dessus, A est une Q -algèbre. ■

Remarque 4 1. *Le résultat précédent n'est pas valide sans la métrisabilité comme le montre l'exemple suivant ([9], Exemple 1). Soit A l'algèbre des fonctions complexes définies et continues sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour toute partie compacte et dénombrable K de $[0, 1]$, on définit la semi-norme p_K sur A par $p_K(x) = \sup_{t \in K} |x(t)|$. Alors $(A, (p_K)_K)$ est une a.l.m.c. complète qui n'est pas une Q -algèbre. Cependant, tout idéal maximal de A est de codimension 1.*

2. *Le résultat précédent est également non valide sans la m -convexité. En effet, considérons l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, notons par $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel (de dimension finie) de $\mathbb{C}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Munie de la topologie localement convexe limite inductive du système $(\mathbb{C}_n[X])_{n \geq 1}$, l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ devient une a.l.c. complète. Par ailleurs, tout idéal maximal de $\mathbb{C}[X]$ est de codimension 1. Mais elle n'est pas une Q -algèbre.*

Désignons par $\mathcal{X}(A)$ l'ensemble des caractères continus non nuls de A . La proposition suivante nous donne une amélioration du lemme 1.3, p. 187 de [6].

Proposition 6 *Soit A une algèbre bilatérale unitaire.. Alors A est une Q -algèbre pour toute topologie d'a.l.m.c. admissible dans laquelle $\mathcal{X}(A)$ est équicontinu.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{X}(A)$ est équicontinu. Soit $1 \geq \varepsilon > 0$. Il existe $V \in \mathcal{V}_A(0)$ tel que pour tout $x \in V$, $\sup \{|f(x)| : f \in \mathcal{X}(A)\} \leq \varepsilon$.

Par le fait que $Sp_A(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{X}(A)\}$, on a $\{x \in A : \rho_A(x) \leq 1\} := \mathcal{S}(A) = (\mathcal{X}(A))^\circ := \{x \in E : \sup \{|f(x)| : f \in \mathcal{X}(A)\} \leq 1\} \supset V$. Donc $\mathcal{S}(A)$ est un voisinage de zéro. D'où le résultat. ■

Plus généralement on a le résultat suivant.

Proposition 7 *Soit A une algèbre bilatérale unitaire.. Alors A est une Q -algèbre pour toute topologie d'a.l.m.c. admissible dans laquelle la transformée de Gelfand est continue.*

Preuve. Supposons que la transformée de Gelfand soit continue. Par un résultat de A. Mallios (Theorem 1.1, 182. de [6]), $\mathcal{X}(A)$ est équicontinu. D'où le résultat. ■

Examinons maintenant une autre condition algébrique portant sur les idéaux principaux de l'algèbre.

Proposition 8 *Soit A une algèbre vérifiant la propriété suivante*

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbf{N}, Ax^n = Ax^{n+1} \quad (*)$$

Alors $(A, \|\cdot\|)$ est une Q -algèbre, pour toute norme d'algèbre $\|\cdot\|$ dans chacun des cas suivants:

1. A est unitaire.
2. A est bilatérale (en particulier, si A est commutative).

Preuve. Distinguons d'abord le cas où A est unitaire (d'unité e). Soit $x \in A$ tel que $\|e - x\| < 1$. Considérons un entier n vérifiant $Ax^n = Ax^{n+1}$. Comme x est inversible dans la complétée de A , on a $A = Ax$. D'où l'inversibilité de x dans A . Passons maintenant au cas où A est bilatérale (non nécessairement unitaire). Soit $x \in A$ tel que $\|x\| < 1$ et montrons qu'il est quasi-inversible. Soit n un entier vérifiant $Ax^n = Ax^{2(n+1)}$. Considérons alors $a, b \in A$ tel que $x^{n+1} = ax^{2(n+1)} = x^{2(n+1)}b$. Alors on voit facilement que l'algèbre Ax^{n+1} admet ax^{n+1} comme unité à gauche. De même, elle admet $x^{n+1}b$ comme unité à droite. Finalement, l'algèbre Ax^{n+1} est unitaire. De plus, elle vérifie $(*)$. Par le premier cas, Ax^{n+1} est une Q -algèbre. D'où la quasi-inversibilité de x dans A . ■

Comme conséquence, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 9 *Soit A une algèbre unitaire ou bilatérale qui est artinienne. Alors A est une Q -algèbre pour toute topologie m -convexe séparée.*

Preuve. Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille filtrante croissante de semi-normes sous-multiplicatives sur A . Pour tout i , notons par N_i le noyau de la semi-norme p_i . Comme A est artinienne, il existe $i_0 \in I$ tel que N_{i_0} soit minimal dans la famille $(N_i)_{i \in I}$. Alors on a $N_i = N_{i_0}$, pour tout $i \geq i_0$. D'où $N_{i_0} = \{0\}$, vu la séparation. Par ailleurs, la topologie définie sur A par la famille $(p_i)_{i \in I}$ est plus fine que celle définie par la norme p_{i_0} . Et on conclut par la proposition précédente. ■

Remarque 5 *Une algèbre topologique quelconque vérifiant $(*)$ n'est pas nécessairement une Q -algèbre. En effet, l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbf{N}}$, des suites complexes munie, de la topologie définie par la famille des semi-normes $(p_k)_{k \geq 0}$, avec $p_k((x_n)_n) = \max\{|x_n|, n \leq k\}$ est une*

a.l.m.c. de Fréchet vérifiant $\mathbb{C}^N x = \mathbb{C}^N x^2$, pour tout $x \in \mathbb{C}^N$. Mais, elle n'est pas une Q -algèbre puisque qu'elle contient des éléments dont les spectres ne sont pas bornés. Par ailleurs, dans une algèbre commutative A vérifiant $()$, tout idéal principal admet une puissance qui est fermée. Ceci entraîne la propriété " Q -algèbre" dans le cas normé.*

Nous obtenons également comme conséquence le fait bien connu suivant.

Corollaire 10 *Il n'existe pas de norme d'algèbre sur $\mathbb{C}^N$.*

Preuve. L'algèbre $\mathbb{C}^N$ vérifie $\mathbb{C}^N x = I\mathbb{C}^N x^2$, pour tout $x \in \mathbb{C}^N$. De plus, elle contient des éléments de spectre non borné. Et on conclut par la proposition précédente. ■

Avant de continuer de dégager certaines conditions algébriques entraînant la propriété " Q -algèbre", nous donnons le lemme suivant dont la preuve est analogue à celle de ([3], Proposition 2.1, p.188).

Lemme 11 *Soit A une F -algèbre commutative unitaire et qui n'est pas une Q -algèbre. Alors il existe une suite $(e_n)_n$ d'éléments non inversibles de A , convergente vers l'unité et tel que, $Ae_n \subset Ae_{n+1}$, pour tout n .*

Proposition 12 *Soit A une algèbre factorielle. Alors A est une Q -algèbre pour toute topologie de F -algèbre.*

Preuve. Considérons une topologie de F -algèbre sur A . Montrons d'abord que si l'idéal aA est dense dans A alors a est inversible. En effet, supposons que aA est dense. Par le théorème de Mittag-Leffler ([2], Théorème 5.3, p.147), l'idéal $\cap_{n \geq 0} a^n A$ est aussi dense dans A . En particulier, il est non nul. En utilisant l'unicité de la décomposition des éléments non nuls de A en produit d'éléments irréductibles, on obtient que a est inversible. Montrons maintenant que A est une Q -algèbre. Supposons que ce n'est pas le cas. Par le lemme précédent, il existe une suite $(e_n)_n$ d'éléments non inversibles de A , convergente vers l'unité et tel que $Ae_n \subset Ae_{n+1}$, pour tout n . D'après ([1], p.226), il existe un entier n_0 tel que $Ae_n = Ae_{n_0}$, pour tout $n \geq n_0$. Il en résulte que l'idéal Ae_{n_0} est dense dans A . Donc, par ce qui précède, e_{n_0} est inversible; ce qui n'est pas le cas. ■

Remarque 6 1. La complétude est nécessaire pour la validité du résultat précédent.

En effet, l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes, qui est factorielle, munie de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$ n'est pas une Q -algèbre. De même, la métrisabilité est nécessaire. (Voir Exemple 2, Remarque 4).

2. Une condition algébrique "proche" de la "factorialité" est le caractère "Bezout": Une algèbre commutative est dite de Bezout si tout idéal de type fini est principal. Une F -algèbre de Bezout n'est pas nécessairement une Q -algèbre. En effet, considérons l'algèbre $H(\mathbb{C})$ des fonctions complexes holomorphes sur $\mathbb{C}$. Munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$, elle devient une a.l.m.c. de Fréchet. De plus, elle est intègre et de Bezout. Cependant, elle n'est pas une Q -algèbre puisque son groupe des éléments inversibles est $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas ouvert.

L'algèbre $\mathbb{C}[X]$ considérée dans 1. de la remarque ci-dessus jouit d'une autre propriété algébrique, à savoir la noethérianité. Elle n'est pas une Q -algèbre. Cependant, dans le cas métrisable complet, on a ce qui suit.

Proposition 13 Soit A une algèbre commutative noethérienne et unitaire. Alors A est une Q -algèbre pour toute topologie de F -algèbre.

Preuve. Considérons une topologie de F -algèbre sur A et supposons que A n'est pas une Q -algèbre. Comme dans la preuve de la proposition précédente, on met en évidence un élément x non inversible de A tel que l'idéal $I = \cap_{n \geq 0} x^n A$ est dense dans A . Par ailleurs, il est facile de montrer que $xI = I$. Donc, par ([8], Lemme 2, p.215), il existe $a \in I$ tel que $(e - a)I = \{0\}$, où e est l'unité de A . Il s'en suit que $(e - a)A = \{0\}$, vu la densité de I . D'où $a = e$; et par suite x est inversible; ce qui n'est pas le cas. ■

Dans une Q -algèbre, le radical de Jacobson est fermé. La proposition suivante montre que la réciproque est vraie dans le cas semi-local.

Proposition 14 Soit A une algèbre semi-locale. Alors A est une Q -algèbre pour toute topologie d'algèbre pour laquelle le radical de Jacobson de A est fermé.

Preuve. Soient $M_1, \dots, M_r$ les idéaux maximaux de A . On a $Rad(A) = \cap_{1 \leq i \leq r} M_i$ qui est fermé. Supposons que l'un des M_i , par exemple M_1 , n'est pas fermé dans A . Alors M_1 est dense dans A . Il en résulte que $Rad(A) = \cap_{2 \leq i \leq r} M_i$; et par suite M_1 contient l'un des M_i , où $i \in \{2, \dots, r\}$. Ce qui ne peut être le cas. ■

Comme conséquence, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 15 Toute a.l.m.c. admettivement complète semi-locale est une Q -algèbre.

Remarque 7 Si l'algèbre A considérée dans la proposition 14, admet un seul idéal maximal, alors ce dernier est fermé pour toute topologie d'a.l.m.c. séparée; et donc A est une Q -algèbre. Voici un exemple montrant que ce n'est pas nécessairement le cas sans la m -convexité. Soit $\mathbb{C}(X)$ l'algèbre des fractions rationnelles à coefficients complexes. Par ([7], 3, p.731), elle est munie d'une topologie d'a.l.c. métrisable et à produit continu. Notons par A la sous-algèbre de $\mathbb{C}(X)$ formée des fractions rationnelles qui peuvent s'écrire P/Q avec $Q(1) \neq 0$. L'algèbre A est locale d'idéal maximal le noyau du caractère χ , où $\chi(x) = x(1)$, pour tout $x \in A$. De plus, elle est dense dans $\mathbb{C}(X)$. Par ailleurs, le caractère χ ne peut être continu car sinon il se prolongerait à $\mathbb{C}(X)$, ce qui ne pourrait être le cas vu que $\mathbb{C}(X)$ est un corps. Le groupe des éléments inversibles de A , qui est égal à $A \setminus \text{Ker} \chi$, n'est donc pas ouvert.

Remerciements.

Les auteurs remercient vivement les Professeurs M. Oudadess et A. El Kinani pour les remarques et commentaires lors de la préparation de ce papier.

References

- [1] N. Bourbaki. *Algèbre commutative*. Chapitres 5 à 7 (nouveau tirage). Masson. 1985.
- [2] H. G. Dales. "Automatic continuity: A survey". *Bull. Lond. Math. Soc.* **10**. 129-183. (1978).
- [3] J. Esterle. "Idéaux maximaux denses dans les algèbres de Fréchet." *Bull. Sc. Math.* **119**. (1995). 187-194.
- [4] E. Hille, R. S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups*. Amer. Math. Soc. (1975).
- [5] J. P. Lafon. *Algèbre commutative, langages géométrique et algébrique*, Hermann. 1977. Paris.
- [6] A. Mallios, *Topological Algebras, Selected Topics*, North-Holland, Amsterdam (1986).
- [7] J. H. Williamson. "On topologizing the field $\mathbb{C}(t)$ " *Proc. Amer. Math. Soc* **5** (1954). 729-734.
- [8] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative algebra*. Vol I. New-York-Heidelberg-Berlin. (1979).
- [9] W. Zelazko. "On maximal ideals in commutative m -convex algebras". *Stud. Mat. T.* **LVIII**. (1976), 290-298.